Abbé Th. Moreux

Pour Comprendre la GÉOMÉTRIE Plane.



Bibliothèque d'Education Scientifique
- Chez GASTON DOIN. Editeur -

BIBLIOTHÈQUE

D'ÉDUCATION SCIENTIFIQUE

PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION

de l'Abbé **Th. MOREUX**

Directeur de l'Observatoire de Bourges

POUR COMPRENDRE LA GÉOMÉTRIE PLANE

DU MÊME AUTEUR, A LA MÊME LIBRAIRIE

Pour comprendre l'Arithmétique, *nouvelle édition,* 216 pages avec figures.

Pour comprendre l'Algèbre, *nouvelle édition,* 252 pages avec figures.

Pour comprendre la Géométrie plane, *nouvelle édition,* 252 pages avec 218 figures.

Pour comprendre la Géométrie dans l'Espace et les courbes usuelles, *nouvelle édition,* 220 pages avec 144 figures.

Pour comprendre le Calcul différentiel, *nouvelle édition,* 224 pages avec 37 figures.

Pour reconnaître les fleurs. I. Flore simplifiée, 208 pages avec figures.

Pour reconnaître les fleurs. II Atlas de la flore simplifiée, 158 planches contenant 410 figures.

Pour comprendre la mécanique, 156 pages, avec 157 figrues.

Pour comprendre Einstein, *nouvelle édition,* un volume in-16 de 248 pages avec figures..

Origine et Formation des Mondes, *nouvelle édition,* un volume in-8 de 416 pages avec 124 figures dans le texte et 18 planches hors texte.

L'Etude de la Lune, avec Dictionnaire sélénographique, *nouvelle édition,* un volume in-16 de 168 pages.

Tables de logarithmes à cinq décimales et tables diverses, un volume in-16 de 112 pages.

Les autres Mondes sont-ils habités ? *nouvelle édition,* un volume de 150 pages avec 8 planches hors texte.

La Science mystérieuse des Pharaons, *nouvelle édition,* un vol. in-16 de 240 p. avec fig. et 8 planches hors texte.

Les Confins de la Science et de la Foi. Tome I, *nouvelle édition,* un volume in-16 de 300 pages.

Les Confins de la Science et de la Foi. Tome II, 1 vol. in-16 de 300 pages.

Les Enigmes de la Science. Tome I, *nouvelle édition,* 1 vol. in-16 de 308 pages avec figures dans le texte et 8 planches hors texte.

Les Enigmes de la Science. Tome II, 1 vol. in-16 de 292 pages.

Construisez vous-même votre Poste de Téléphonie sans fil, *nouvelle édition* ,un volume in-16 de 250 pages avec 120 figures dans le texte.

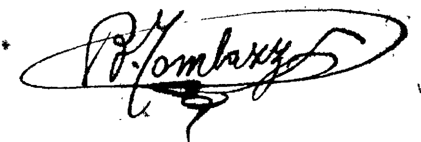
L'Atlantide a-t-elle existé ? un volume in-8 de 96 pages avec figures et cartes.

L'Alchimie moderne, un volume in-8 de 96 pages avec figures et 2 planches.

La vie sur Mars, un volume in-8 de 96 pages avec figures et 2 planches hors texte.

Atlas céleste, un volume de 12 planches avec légendes explicatives.

Le Catalogue général des ÉDITIONS DOIN *est envoyé franco sur demande*



POUR COMPRENDRE
LA GÉOMÉTRIE PLANE

PAR

l'Abbé **Th MOREUX**

DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE DE BOURGES

NOUVELLE ÉDITION

Avec 218 figures dans le texte

PARIS
LIBRAIRIE OCTAVE DOIN
GASTON DOIN ET Cie, ÉDITEURS
8, PLACE DE L'ODÉON, 8

1926



POUR COMPRENDRE
LA GÉOMÉTRIE PLANE

PREMIÈRE LEÇON

LES ANGLES ET LES TRIANGLES

Après avoir appris un peu d'Arithmétique et d'Algèbre, la logique nous convie à porter nos efforts sur une science tout à fait différente : la *Géométrie*. Avant même de l'avoir étudiée, vous savez à peu près de quoi elle s'occupe. Ne perdons donc pas un temps précieux à des définitions plus ou moins compréhensibles et disons à quoi sert la Géométrie.

1. Nous avons vu en Arithmétique que les nombres peuvent servir à mesurer les longueurs, à évaluer la grandeur d'un terrain, etc...

Se livrer à ces opérations, c'est faire de la Géométrie.

Voici une maison dont la façade est très large : vous voulez tendre des fils de fer dans tous les sens pour y faire grimper des plantes ; combien vous faudra-t-il de mètres de fil ?

Ce problème appartient évidemment à l'Arithmétique, puisque vous emploierez des nombres, mais il relève aussi de la Géométrie, dès lors que vous considérez des figures.

Alors me demanderez-vous : Qu'est-ce qu'une figure ? Je réponds aussitôt par des exemples.

Prenez une boîte en carton bien fermée par son couvercle ; elle occupe une certaine place en rapport avec sa grosseur ; une petite boîte prend moins d'espace qu'une caisse ; nous dirons que boîte et caisse offrent un certain *volume*. Il en sera de même d'une bouteille, d'un encrier, etc... Maintenant supposons qu'une boîte contienne autant d'eau qu'une bouteille, nous serons en droit d'affirmer que la bouteille et la boîte ont *même volume* ou mieux des volumes équivalents.

Si, par des procédés que nous étudierons nous parvenons à évaluer ces volumes, nous ferons encore de la Géométrie.

Reprenons notre boîte en carton et disposons-nous à la recouvrir de papier sur toutes ses faces ; il est clair qu'il faudra d'autant plus de papier que la boîte sera plus grande. Ainsi voilà une autre donnée toute différente du *volume* ; le papier employé représente en effet la *surface*, l'extérieur de la boîte, alors que le volume se rapportait à son intérieur ; nous ne mesurerons donc pas volumes et surfaces avec les mêmes unités.

Géométrie — Gé (terre) Métron (mesure) en grec

Un volume comme la boîte possède une épaisseur, mais une surface n'en a pas ; la preuve, c'est qu'un papier mince recouvrirait aussi bien la boîte qu'un gros carton. Mais notre papier mince lui-même, n'est pas une vraie surface, puisqu'il a une petite épaisseur.

La surface du papier, c'est le *dessus* et le *dessous* du papier ; on la mesure par sa longueur et sa largeur.

Volumes et surfaces sont ce que les géomètres appellent des *figures*. Une autre sorte de figure étudiée en géométrie est la *ligne*. Ce livre, par exemple, vous présente des pages qui ont une longueur et une largeur ; ces deux dimensions prises séparément sont des *lignes*.

En résumé : une ligne n'a *qu'une* dimension, sa longueur ; une surface en a *deux* : longueur et largeur ; un volume en a *trois* : longueur, largeur, épaisseur (ou hauteur).

Voilà ce qu'étudie le géomètre : les figures et leurs propriétés. Primitivement, ainsi que son nom l'indique, la Géométrie s'appliquait surtout à la mesure des terrains, à l'arpentage (*gè*, en grec, veut dire terre ; *métron*, mesure) mais peu à peu, le champ de ses recherches s'est étendu et aujourd'hui, on peut affirmer qu'aucune science ne saurait se passer de la Géométrie.

Lorsque l'artilleur calcule le trajet de ses projectiles ; lorsque l'architecte dresse le plan d'un monument ou

que le géodésien mesure la surface de la Terre, tous font de la Géométrie.

Il en est de même du physicien étudiant la marche des rayons lumineux à travers les lentilles, du chimiste calculant les angles des cristaux déposés au fond de ses cornues et de l'astronome arpentant au moyen de méthodes perfectionnées, les abîmes sans fin où se meuvent les étoiles.

Pour l'instant, notre ambition ne va pas si loin : dans cette science, vieille comme l'humanité et très perfectionnée, il faut avancer prudemment et par étapes successives.

2. Vous comprenez vous-même qu'autre chose est de calculer la surface d'un rectangle ou d'évaluer le volume d'un remblai et d'un cône.

Dans le premier cas, vous pouvez faire tenir votre figure, rectangle, triangle, sur une feuille à dessin ou sur une planchette bien unie, sur un *plan*, comme disent les géomètres ; vous faites alors de la *Géométrie plane*, de la géométrie où les figures étudiées n'ont tout au plus que *deux* dimensions, longueur et largeur.

Mais si vous passez à l'étude des figures à *trois* dimensions, vous augmentez la difficulté, car vous ajoutez une troisième dimension. La surface d'une boule par exemple, ne saurait s'appliquer sur un plan ; pour l'évaluer, il faut faire de la *Géométrie dans l'espace*.

Dans ce livre qui comprendra la première partie de la Géométrie, nous nous bornerons à l'étude des figures contenues dans le plan, et c'est la raison pour laquelle vous pouvez lire sur la couverture : « *Pour comprendre la Géométrie plane* »

La Géométrie dans l'espace sera pour le volume suivant.

3. Maintenant, mettons-nous à l'œuvre résolument. Notre outillage ne sera pas coûteux : Quelques feuilles de papier blanc, une règle, une paire de ciseaux, un crayon finement aiguisé et enfin un compas que nous

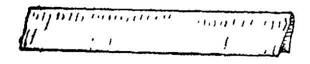


Fig. 1.
Ligne droite fabriquée avec un papier plié.

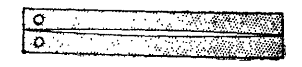


Fig. 2.
Vérification d'une règle plate, à dessin.

achèterons chez le papetier du coin. Ce compas peut être en bois avec une pointe ou une aiguille à la première branche et un crayon à la seconde. Quant à la règle, voici un moyen de la fabriquer vous-même ; prenez un papier un peu fort, bristol peu épais, pliez ce papier en deux ; le pli sera une ligne droite (fig. 1).

En relevant son bord légèrement, vous pourrez y appuyer votre pointe de crayon et tracer de superbes lignes droites, mieux qu'au moyen d'une règle en bois

Cependant, si vous préférez cette dernière, libre à vous, mais il faut la vérifier.

A cet effet tracez une ligne en suivant votre règle (fig. 2) ; nous supposons que c'est une règle plate à dessin. Maintenant retournez votre règle de manière que l'autre face soit appliquée sur le papier, les extrémités étant aux mêmes points. Tracez de nouveau une ligne ; si les deux lignes tracées coïncident, votre règle est parfaite et vous aurez des lignes droites ; sinon, ce sont des lignes courbes.

Pourquoi ? Parce que toutes les lignes droites se ressemblent. Entre deux points A et B, on ne peut faire passer qu'une ligne droite.

Si vous insistez pour avoir une définition de la ligne droite, je ne saurais vous répondre. Nous savons que la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre, qu'un fil fortement tendu est une bonne représentation, pour l'esprit, de la ligne droite et c'est tout. Voilà ce que nous dit l'évidence, mais nous ne saurions fournir une définition plus claire.

Les sciences sont pleines de ces notions premières qui s'imposent : ce sont là des vérités admises par tous les hommes sains d'esprit et cela ressemble fort à ces propositions que nous appelons des *axiomes*, comme « Le tout est plus grand que la partie » par exemple. Voilà un genre de vérité qui ne se démontrent pas.

Celles qui se démontrent, en Géométrie, s'appellent *théorèmes* ou *propositions* et nous aurons plus d'une fois l'occasion de les rencontrer.

Au reste, c'est même l'étude de ces théorèmes s'enchaînant entre eux, qui fait toute la Géométrie. Leur ensemble forme ce que l'on appelle les *Éléments d'Euclide*, depuis que ce philosophe grec, qui vivait au IIIe siècle avant Jésus-Christ, eut la bonne idée de les réunir et même de les codifier, au grand désespoir, paraît-il, de tous les écoliers.

La méthode d'Euclide, qu'on emploie encore dans nos écoles, est évidemment un modèle de logique ; rien ne peut mieux former nos esprits à la précision ; c'est une gymnastique merveilleuse pour l'entendement, mais telle quelle, elle ne saurait être réservée qu'à des intelligences en pleine maturité et j'ai toujours pensé qu'on pouvait enseigner la Géométrie autrement, en faisant appel, par exemple, et plus largement, à l'intuition, quitte à revenir peu à peu sur les théorèmes déjà pressentis.

N'allez pas croire toutefois que la Géométrie s'apprend sans aucun effort ; je réclame de vous une certaine attention et surtout la mémoire des mots techniques que nous emploierons au fur et à mesure de nos acquisitions. Quoi d'étonnant ? Lorsqu'un jeune homme embrasse une profession, ne doit-il pas se familiariser avec les noms des outils qu'il emploiera par la

suite. Un apprenti menuisier doit savoir ce que c'est qu'une équerre, un rabot ou une varlope, de même qu'un étudiant en musique ne saurait jouer d'un instrument s'il continuait à ignorer ce que l'on désigne par gamme, tons, demi-tons, dièses et bémols.

Chaque science doit donc avoir son langage à elle et l'on conçoit fort bien que celui du physicien soit tout différent de celui du chimiste.

Ainsi, le géomètre a ses mots techniques et une langue qu'il faut apprendre ; mais ne vous effarouchez pas de ma franchise ; je ménagerai vos forces et, somme toute, je ferai plus souvent appel à votre intelligence qu'à votre mémoire.

Nous sommes déjà en possession de la notion de ligne droite ; avec celle de la circonférence, nous allons être à même de construire toute la géométrie plane, jusqu'aux courbes usuelles exclusivement.

La circonférence et les angles.

4. Sur une feuille de papier un peu fort, tracez une *circonférence* avec votre compas ; vous avez déjà l'idée d'une ligne courbe, c'est-à-dire d'une ligne qui n'est ni droite, ni formée de tronçons de droites (fig. 3).

Maintenant découpez la ligne ainsi tracée avec vos ciseaux, en suivant le contour aussi parfaitement que possible ; la surface découpée est un *cercle* (fig. 4) ; c'est une surface plane que vous ne confondrez pas

avec la circonférence qui, elle, est une ligne simplement et que nous pouvons définir ainsi : *une courbe plane fermée dont tous les points sont à la même distance d'un point intérieur appelé centre.*

Ici, vous m'arrêtez et vous me demandez pourquoi je viens d'employer deux fois le mot *plane* : surface

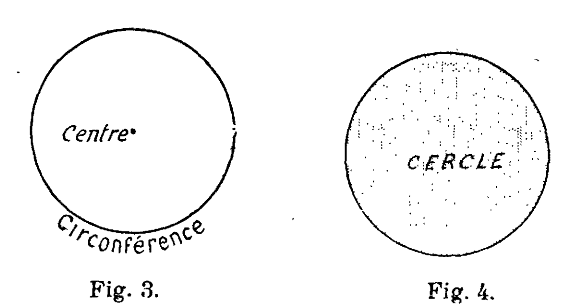


Fig. 3. Fig. 4.

plane, courbe plane. Simplement parce que nous étudions des figures contenues dans un plan. Il s'agit donc de définir ce dernier mot.

Un *plan*, c'est une *surface telle que vous pouvez y appliquer une règle*, donc une *ligne droite dans tous les sens*. Une table bien rabotée est un plan, une planche à dessin est un plan.

Cette distinction est tout à fait nécessaire et vous allez le comprendre immédiatement. Tracez une courbe quelconque sur une boule en ayant soin, après maints détours, de revenir à votre point de départ ; vous avez bien encore une courbe fermée dont tous les

points sont à la même distance du centre de la sphère; et cependant la ligne tracée ne répond pas du tout à la définition de la circonférence. Pourquoi ? Parce que les points tracés, les points de la courbe, ne sont pas contenus dans un *même* plan ; la courbe n'est pas plane.

Je ne reviendrai plus sur ces notions, puisque d'ores et déjà nous savons que toutes les figures étudiées dans ce livre relèvent de la géo métrie plane.

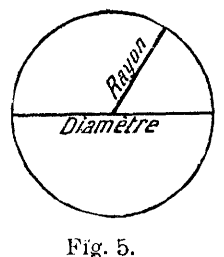


Fig. 5.

Ceci admis, reprenons notre cercle en papier, c'est-à-dire la surface renfermée par la circonférence. Une droite menée du centre au pourtour est un *rayon* ; une droite menée par le centre à deux points opposés de la circonférence s'appelle *diamètre*. Tous les rayons sont évidemment égaux puisque la circonférence a été tracée avec la même ouverture de compas, et le diamètre vaut deux rayons (fig. 5).

Fig. 6.

Maintenant, plions le cercle en deux en passant par le centre ; le cercle sera divisé en deux parties égales, qui se recouvriront nécessairement (fig. 6), puisque tous les points doivent être à égale distance du centre.

Nous voici en possession de la notion d'*égalité*. En

Géométrie, en effet, deux figures sont dites égales lorsqu'elles se superposent exactement.

Mais continuons ; plions encore notre moitié de cercle en deux. Cette fois, nous aurons un quart de cercle et un quart de circonférence (fig. 7). L'espace compris entre les deux rayons aboutissant au centre, c'est ce que l'on appelle un *angle*. Le point de rencontre est le *sommet* de l'angle et les deux droites qui le déterminent sont les *côtés* de l'angle.

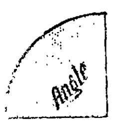


Fig. 7.

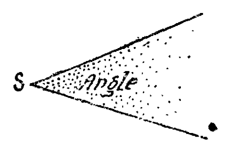


Fig. 8. — Représentation d'un angle. Le sommet est en S.

Le quart de cercle pourrait ne pas exister, l'angle subsiste toujours : ainsi, lorsque deux droites se rencontrent, elles forment nécessairement un angle avec ses côtés et son sommet (fig. 8).

Il s'agit maintenant d'apprendre à mesurer les angles.

5. Pour mesurer une longueur, vous savez qu'on prend une *unité* de convention, unité qu'on porte bout à bout le long de la grandeur à mesurer ; et la mesure est précisément le nombre qui exprime combien la longueur contient d'unités. Si j'ai reporté 3 ou 4 fois une longueur d'un mètre en mesurant une pièce d'étoffe, je dirai que cette pièce a 3 ou 4 mètres. La mesure peut n'être pas contenue un nombre exact de

fois ; peu importe, j'emploierai des subdivisions, centimètre, millimètre, etc..., mais lorsqu'il s'agit d'angles, c'est-à-dire de choses qui n'ont rien de commun avec des longueurs, on conçoit qu'il faille recourir à un autre procédé, choisir des unités différentes des mètres ; pour mesurer des angles nous allons donc nous y prendre autrement.

Angles droits.

6. Déplions nos deux quarts de cercle, nous retrouverons notre demi-cercle, mais le pli, formé suivant un rayon, a déterminé deux angles égaux, l'un à droite, l'autre à gauche.

Ce rayon qui tombe sur un diamètre déterminant 2 angles égaux est une *perpendiculaire* par rapport à ce même diamètre et les angles ainsi formés sont appelés *angles droits*.

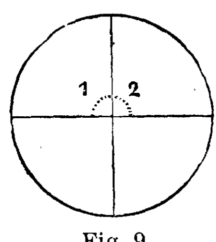


Fig. 9.

Le plus souvent, les angles sont désignés par un chiffre placé dans leur intérieur, près du sommet. Ainsi nous dirons que les angles 1 et 2 sont droits et égaux (fig. 9).

Remarquez qu'il n'est pas nécessaire pour avoir des angles droits, et par conséquent pour tracer une perpendiculaire de décrire un cercle.

Soit la droite AB, vous voulez élever une perpendiculaire en son milieu : pliez votre papier de manière à

amener le point B sur le point A (fig. 10) ; formez le pli ; vous avez une perpendiculaire. En effet CO tombe sur AB en formant deux angles égaux qui sont droits, comme dans l'exemple précédent et ils sont égaux parce qu'ils se recouvrent exactement.

C
1 2
A O B
Fig. 10.

Il résulte de ce dernier exercice que la valeur d'un angle ne dépend pas de la longueur de ses côtés, puisque vous pouvez prolonger les droites AB et OC aussi loin que vous voudrez sans altérer l'égalité des angles 1 et 2 ; ceux-ci continueront évidemment à être égaux (et à être droits).

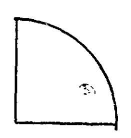


Fig 11.

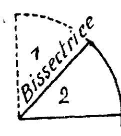


Fig. 12.

On peut en dire autant de tous les angles. Reprenons en effet notre quart de cercle (fig. 11), plions-le encore en deux exactement, le pli divisera le premier angle en 2 parties (fig. 12) ; nous aurons 2 angles plus petits, mais qui sont égaux entre eux ; le côté commun, le pli, s'appelle *bissectrice* de l'angle (bis, secteur) et les angles situés de chaque côté de la bissectrice sont dits *adjacents*. Ce dernier terme s'applique aussi à des angles qui ont

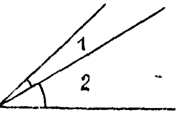


Fig. 13.
Angles adjacents.

même sommet et qui sont situés de part et d'autre d'un côté commun (fig. 13).

7, Résumons ces premières notions :

Une perpendiculaire est une droite qui tombe sur une autre (ou qui en rencontre une autre) en formant avec celle-ci deux angles adjacents égaux : ces deux angles sont *droits.*

L'angle droit sert *d'unité* d'angle ; nous verrons bientôt ses subdivisions.

Une bissectrice est une droite qui, partant du sommet d'un angle, divise cet angle en deux angles adjacents égaux.

Deux angles sont dits *adjacents* lorsqu'ils ont même sommet, un côté commun, et qu'ils sont situés de part et d'autre de ce côté commun (fig. 13).

Les divisions de l'angle droit; comment on mesure les angles.

8. Reprenons notre cercle en papier, et supposons qu'au lieu de le diviser en 4 angles droits, je sois parvenu, par une habile manœuvre, à le plier de façon à déterminer 360 angles égaux dont les sommets partent tous du centre ; chaque angle droit vaudra 90 de ces petits angles, puisque 4 fois 90 = 360, j'appellerai chacun de ces angles partiels angle de *un degré.*

Ainsi, *un angle droit vaudra 90 degrés* (fig. 14).

Deux angles droits vaudront $2 \times 90 = 180$ degrés.

Nous savons déjà que les degrés s'écrivent avec un petit zéro ; nous écrirons donc 90°, 180°, 360°.

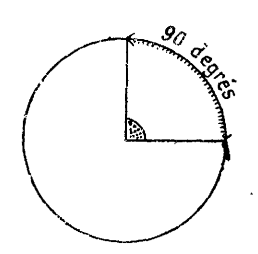


Fig. 14.
Valeur de l'angle droit en degrés

Ce qui manque à un angle pour valoir un droit s'appelle *complément* de l'angle.

Exemple : Quel est le complément d'un angle de 30° ?

Nous écrirons : $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. L'angle de 60° est donc le complément de l'angle de 30°, et ces deux angles sont dits *complémentaires*, car $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$, c'est-à-dire un angle droit.

De même le *supplément* est ce qui manque à un angle pour valoir 2 droits ou 180°. Ainsi 150° est le supplément de 30° car nous avons : $150^\circ + 30^\circ = 180^\circ$ ou deux droits. Les angles de 150° et de 30° sont dits *supplémentaires*.

9. Pratiquement, pour mesurer un angle, on se sert d'un instrument appelé *rapporteur*. C'est un demi-cercle transparent, en corne généralement, qui porte, gravées sur son pourtour, des lignes fines marquant les degrés (fig. 15 et 15 *bis*).

Soit à évaluer l'angle AOB. Plaçons notre rapporteur sur cet angle de façon à faire coïncider sa base avec le

côté AO, le point O étant placé au centre de la base ; il suffira de chercher avec quelle division du rapporteur coïncide le côté BO. S'il tombe sur la division 42, nous dirons que notre angle vaut 42°.

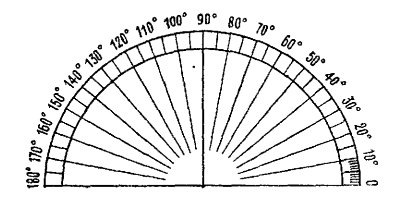


Fig. 15.
Rapporteur servant à évaluer les angles.

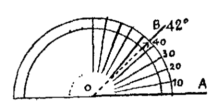


Fig. 15 *bis*. — Manière de se servir d'un rapporteur.

Les *graphomètres* (fig. 16) dont vous avez entendu parler, instruments dont se servent les arpenteurs et les géomètres, ne sont autres que des rapporteurs en

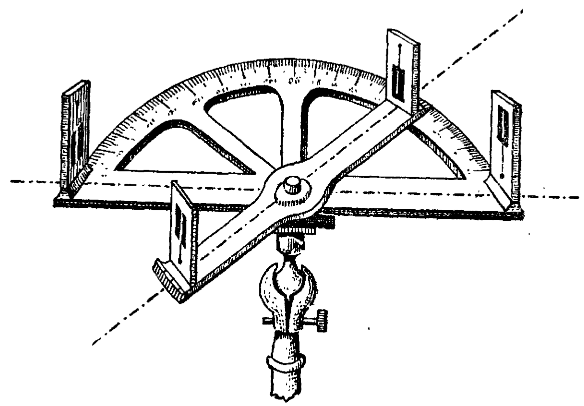


Fig. 16. — Graphomètre, sorte de rapporteur servant à évaluer les angles sur le terrain.

cuivre de grand modèle. On les emploie pour mesurer les angles sur le terrain. La base OA étant dirigée vers un point, un clocher, je suppose (fig. 16 *bis*), pour mesurer l'angle ou l'écart entre ce clocher et une girouette

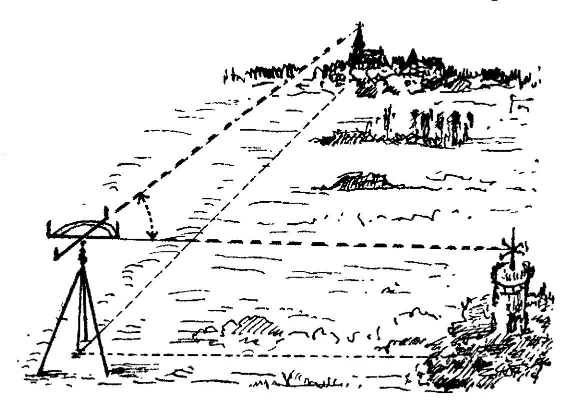


Fig. 16 *bis*. — Usage du graphomètre pour mesurer les angles sur le terrain.

située sur une tour aperçue aussi du point O, il suffit de faire tourner une règle dans la direction de cette dernière, de viser très exactement la girouette avec la règle mobile et de lire l'angle.

L'instrument est alors d'une grande utilité pour lever des plans de grandes surfaces, les plans cadastraux par exemple, pour mesurer des distances, pour arpenter de larges étendues, etc.

Quand il s'agit de relevés très précis, on adjoint au graphomètre des lunettes mobiles qui servent aux

visées plus exactes : les instruments deviennent alors des *théodolites*.

Dejà avec les graphomètres, on mesure des angles à moins de *un* degré près. Dans ce cas, ainsi que nous l'avons vu en *Arithmétique* (v. p. 66) on obtient des minutes et des secondes. Le degré, nous le savons, est divisé en 60 minutes et la minute contient 60 secondes.

On a donc : $1^\circ = 60' = 3\,600''$.

Cette méthode, usitée pour les angles, sert aussi pour les *arcs, qui sont des parties de la circonférence* (fig. 17). Les arcs correspondent évidemment aux angles à condition de tracer ces arcs à partir du sommet de l'angle comme dans les exemples précédents; mais nous reviendrons sur ce sujet en étudiant dans un chapitre spécial la circonférence. En attendant, le lecteur fera bien de revoir les pages 66 à 75 de l'*Arithmétique* où nous donnons aussi la raison probable pour laquelle la circonférence a été divisée en 360 degrés et le degré en 60 minutes, etc.

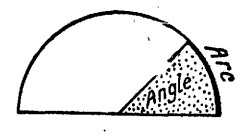


Fig. 17 montrant que dans une même circonférence, les arcs correspondent aux angles.

On a, depuis quelques années, beaucoup préconisé la division de l'angle droit en 100 parties appelées *grades*, celle du grade en 100 minutes et celle de la minute en 100 secondes.

Il s'agit dans ce cas des minutes et des secondes

centésimales et non sexagésimales comme dans la précédente méthode. Le grand avantage est de faciliter les calculs qui relèvent ainsi de la numération décimale et rentrent dans le système métrique. Le procédé est souvent utilisé par les géodésiens, les arpenteurs et les cartographes, mais il n'a pas prévalu en Astronomie où une longue tradition a accumulé des documents notés en degrés, minutes et secondes sexagésimales et aussi pour la raison que la méthode est liée aux valeurs du temps : heures, minutes et secondes, toujours basées sur la division sexagésimale. On compte en effet les heures par 12 ou 24, les minutes et secondes par 60, vestiges du système duo-décimal.

10. Après cette digression nécessaire, revenons à quelques cas d'angles intéressants. Dans notre cercle en papier traçons d'un même côté du diamètre (fig. 18) plusieurs angles que nous numéroterons, il est évident que la somme des angles 1, 2, 3, 4, 5, égale 2 angles droits ou 180°, puisqu'ils recouvrent l'espace occupé par 2 angles qui seraient droits. Nous concluons que :

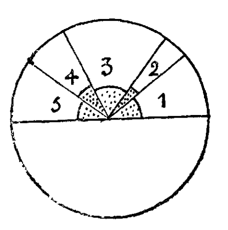


Fig. 18.

La somme des angles formés autour d'un point du même côté d'une droite est toujours égale à deux angles droits ou 180°.

11. Maintenant traçons deux diamètres qui se coupent et numérotons encore les angles (fig. 19), nous dirons que 1 et 2 sont opposés par le sommet ; il en est de même de 3 et 4. Eh bien, ces angles sont égaux deux à deux. C'est-à-dire que 1 = 2 et que 3 = 4.

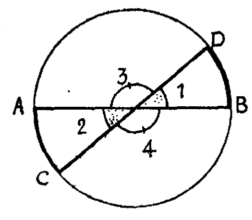


Fig. 19. — Les angles 1 et 2 opposés par le sommet sont égaux.

Cela paraît bien évident à la seule inspection de la figure ; cependant, pour nous habituer aux démonstrations, nous allons le prouver.

Les angles 1 et 3 formés d'un même côté de AB sont supplémentaires : si 1 vaut 30°, 3 vaudra 180° — 30° = 150°.

Considérons maintenant 3 et 2 formés d'un même côté de CD ; ils sont supplémentaires et valent à eux deux 180°. Mais nous savons que 3 vaut 150°, 2 vaut donc le supplément, soit 30°. Ainsi 1 et 2 sont égaux puisqu'ils valent chacun 30°. On ferait le même raisonnement avec 3 et 4. Donc les *angles opposés par le sommet sont égaux.*

Les triangles.

12. L'espace enfermé par deux droites qui se coupent, nous l'avons vu, est un *angle* ; mais cet espace n'est pas limité ; nous avons le loisir en effet d'allonger indéfi-

L'angle = est l'espace enfermé par deux droites qui se coupent

niment les côtés ; coupons ces côtés par une troisième droite (fig. 20). Cette fois notre surface est bien déterminée. Les géomètres appellent une telle surface (limitée par des droites) *polygone* (de *polus*, plusieurs ; *gônia*, angle) ; les droites qui enferment la surface sont les *côtés* du polygone.

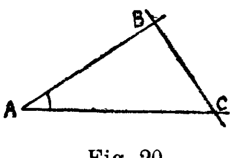


Fig. 20.

On conçoit qu'on peut faire autant de polygones différents que l'on veut.

Un polygone de 3 côtés prend le nom de triangle (3 angles) (fig. 20).

Un polygone de 4 côtés prend le nom de quadrilatère.

Un polygone de 5 côtés prend le nom de pentagone.

Un polygone de 6 côtés prend le nom d'hexagone.

Tous ces mots dérivent du grec ou du latin ; *latère* veut dire côté ; *penta,* cinq ; *hexa,* six, etc.

13. Contentons-nous pour l'instant d'étudier les triangles ; il y en a de trois sortes.

Si dans un triangle tous les côtés sont égaux, nous l'appellerons *équilatéral* (*equus*, égal) (fig. 21).

S'il n'y a que deux côtés égaux, ce sera un triangle *isocèle* (*isos*, semblable) (fig. 22).

Si tous les côtés sont inégaux on dira le triangle *scalène* (ou boîteux, fig. 23).

(Dans les figures, les côtés égaux sont *cochés* par un même nombre de traits).

Enfin les deux derniers peuvent présenter une par

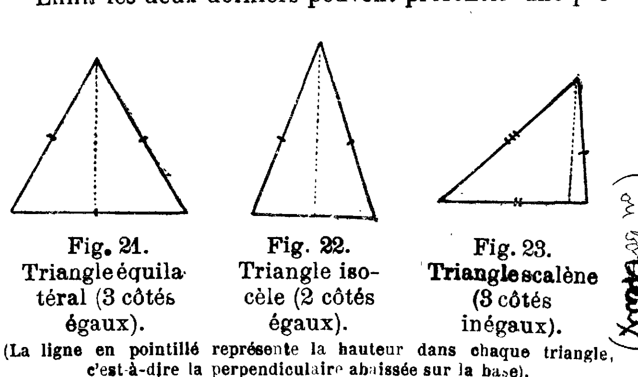


Fig. 21. Triangle équilatéral (3 côtés égaux).

Fig. 22. Triangle isocèle (2 côtés égaux).

Fig. 23. Triangle scalène (3 côtés inégaux).

(La ligne en pointillé représente la hauteur dans chaque triangle, c'est-à-dire la perpendiculaire abaissée sur la base).

ticularité intéressante, ils peuvent avoir *un* de leurs angles *droit* ; dans ce cas, le triangle est dit *rectangle*

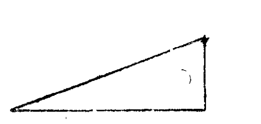


Fig. 24. — Triangle rectangle à 3 côtés inégaux.

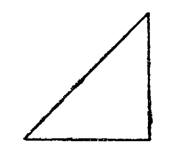


Fig. 25. — Triangle à la fois rectangle et isocèle.

de *rectus*, droit) ; il ressemble à une équerre de dessinateur (fig. 24 et 25).

L'étude seule des triangles, en Géométrie, est illimitée et l'on n'a certainement pas épuisé le sujet : vous

pensez bien que nous nous bornerons ici à quelques considérations seulement, celles qui sont nécessaires pour acquérir les notions indispensables aux mesures de surface que nous aborderons plus tard.

Propriétés du triangle isocèle.

14. Notre cercle en papier fera encore les frais de nos démonstrations. Traçons de nouveau 2 diamètres perpendiculaires l'un sur l'autre (fig. 26) ; maintenant, joignons AC et CB par des droites ; nous obtenons un triangle ABC et ce triangle est *isocèle*. Pourquoi ? Parce qu'il a deux côtés égaux AC = CB.

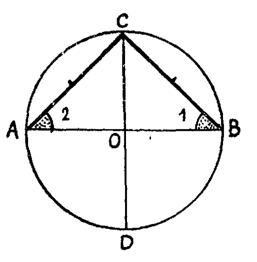


Fig. 26.

Cela est évident, penserez-vous ; mais il serait peut-être préférable d'en posséder une vraie démonstration.. d'autant que celle-ci est très simple, comme vous allez voir.

Replions, comme nous l'avons déjà fait, la partie de droite sur la partie de gauche : B tombe en A ; le point C ne bouge pas ; donc CB tombe exactement sur CA, donc CB = CA.

En outre, je constate que les angles 1 et 2 se recouvrent ; ils sont donc égaux. De même OB = OA.

J'arriverais à la même conclusion si, au lieu de prendre le point C, j'avais pris un point quelconque

situé sur la perpendiculaire OC (fig. 27). J'aurais encore un triangle isocèle; donc deux côtés égaux et deux angles égaux.

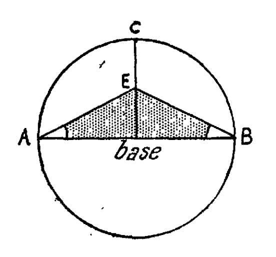


Fig. 27.

Le côté inégal dans le triangle isocèle s'appelle *base* ; je dirai donc :

Dans un triangle isocèle les angles à la base sont égaux et la perpendiculaire sur la base (qui est appelée *hauteur* du triangle. v. *Arithmétique* page 81) *divise la base en deux parties égales,* et ceci est vrai pour tous les triangles isocèles.

Mais, comme en rabattant une moitié sur l'autre (fig. 28) CB coïncide avec CA, les angles au sommet C (3 et 4) se recouvrent et sont égaux, donc la *hauteur* CO *divise l'angle* C *en deux parties égales,* elle est donc *bissectrice* de cet angle.

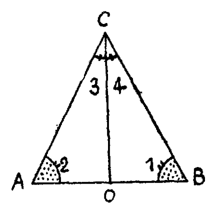


Fig. 28.

Ainsi, voilà une série de conséquences que nous venons de démontrer facilement et que nous ferons bien de retenir.

Résumons-les :

15. *Dans tout triangle isocèle, c'est-à-dire qui a 2 côtés égaux, les deux angles à la base sont égaux.*

La hauteur est une médiane, c'est-à-dire qu'elle divise le côté sur lequel elle tombe (la base) en deux parties égales.

La hauteur est bissectrice de l'angle opposé à la base ; elle *détermine aussi deux triangles rectangles égaux* que vous pouvez voir sur la figure.

Nous n'en finirions pas d'énumérer beaucoup d'autres propriétés ; mais cela nous entraînerait trop loin et je vous laisse le soin de les étudier plus tard, lorsque vous posséderez bien la matière de ce volume.

16. La propriété de la médiane du triangle isocèle d'être en même temps une hauteur, c'est-à-dire d'être perpendiculaire à la base est employée dans le niveau de maçon pour vérifier l'horizontalité d'un mur.

On sait en effet que le fil à plomb

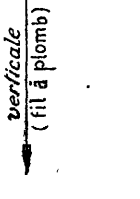


Fig. 29.
La verticale est perpendiculaire à l'horizontale.

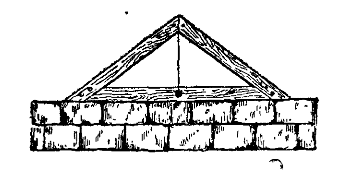


Fig. 30. — Niveau de maçon formé d'un triangle isocèle en bois et destiné à vérifier l'horizontalité d'un plan.

suit la verticale et que cette direction est perpendiculaire à toute droite horizontale en un même lieu (fig. 29).

Dès lors, si nous construisons un triangle isocèle en bois et si nous posons la base de ce triangle sur une surface dont nous voulons vérifier l'horizontalité, il suffira de constater qu'un fil à plomb attaché au sommet du triangle isocèle tombe bien au milieu de la base. Dans ces conditions la surface est horizontale (fig. 30).

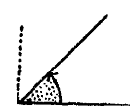
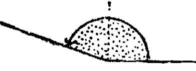


Fig. 30 *bis.* Angle aigu, plus petit que 90°.

Ce que nous avons dit du triangle isocèle est vrai à plus forte raison du triangle *équilatéral.* Puisque tous les côtés de ce triangle sont égaux entre eux, chacun d'eux peut être pris comme base ; médianes, hauteurs et bissectrices s'y confondent.



Angle obtus, plus grand que 90°.

17. Remarque : Quand un angle est plus petit que 90 degrés on dit que cet angle est *aigu* ; s'il dépasse 90°, il est *obtus* ; un triangle peut fort bien posséder un angle obtus ; dans ce cas, la hauteur est encore la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base, mais alors il faut prolonger cette dernière et la hauteur est tout entière en dehors du triangle (fig. 31).

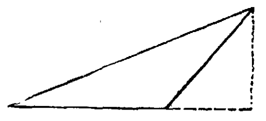


Fig. 31. — Triangle possédant un angle obtus : la hauteur est en dehors du triangle.

EXERCICES ET APPLICATIONS

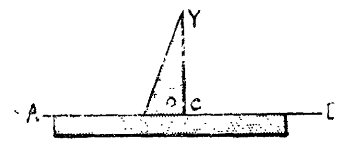
Les exercices que nous allons faire nous serviront, d'une part, à appliquer les principes déjà énoncés, d'autre part, à compléter bon nombre de notions relatives aux angles et aux triangles.

18. Élever en un point donné d'une droite une perpendiculaire à cette droite.

1re *méthode* (fig. 32). Soit la droite AB ; il faut élever une perpendiculaire à cette droite en C. Nous pouvons replier notre papier de droite à gauche, en ayant soin de faire tomber le point B sur le tronçon de droite CA. Le pli formé CY sera la perpendiculaire.

Fig. 32. — Perpendiculaire élevée au moyen d'un pli.

2e *méthode* (fig. 33). A l'aide de l'équerre et de la règle. La règle étant en coïncidence avec AB, je fais glisser l'équerre jusqu'à ce que son pied



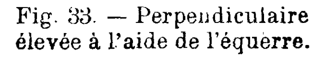


Fig. 33. — Perpendiculaire élevée à l'aide de l'équerre.

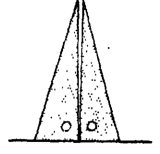


Fig. 33 *bis*. — Vérification d'une équerre.

vienne en C. Le côté CY marque la place de la perpendiculaire.

Toutefois, on aura soin dans ce cas de vérifier son équerre. A cet effet, on élèvera une perpendiculaire sur une droite quelconque, à l'aide de l'équerre; comme dans la méthode précédente, puis on retournera l'équerre; si la droite tracée sur le côté de l'équerre dans le premier cas ne coïncidait pas avec celle tracée dans le second cas, l'équerre serait fausse (fig. 33 *bis*). Car il est évident qu'en un point donné on ne peut mener qu'*une droite perpendiculaire*, c'est-à-dire faisant un angle de 90° (ou déterminant 2 angles adjacents égaux avec une droite donnée).

3e méthode. — On se servira du rapporteur qu'on vérifiera de la même façon et on marquera l'endroit où aboutit le 90e degré.

4e méthode. — C'est la plus usitée (fig. 34). Du point C où l'on doit élever la perpendiculaire, on prend à droite et à gauche, avec la même ouverture de compas, deux longueurs égales soit CA et CB. Du point A on décrit un arc de circonférence avec un rayon plus grand que la moitié AC de AB. On en fait autant *avec le même rayon*, du point B. L'intersection des deux arcs, c'est-à-dire le point où ils se coupent, indique la direction de la perpendiculaire CD.

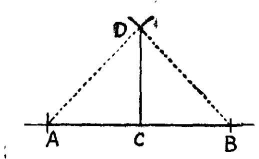


Fig. 34. — Perpendiculaire élevée à l'aide du compas.

En effet, d'après ce que nous avons vu, AD égalant BD, le triangle est isocèle, donc CD (médiane) est *hauteur* et perpendiculaire sur la base AB.

Lieu géométrique.

19. — On peut vérifier, en prenant de A et de B (fig. 35), des rayons de plus en plus grands ou de plus en plus petits ; les points d'intersection seront tous sur la perpendiculaire ; nous aurons construit une série de triangles isocèles emboîtés. D est à la même distance de A et de B ; E est à la même distance de A et de B, etc... Nous pouvons en dire autant de tous les points de la droite CD ; de plus, ces points sont seuls à jouir de cette propriété. Dans ces conditions, on dit que CD est le *lieu géométrique* des points équidistants de A et de B.

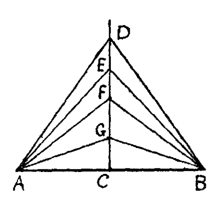


Fig. 35.
Exemple de lieu géométrique.

Une circonférence dont les points sont à égale distance du centre est aussi un exemple de figure qui est un lieu géométrique.

Partager une droite en 2 parties égales.

20. — Nous pouvons la mesurer et prendre la moitié de sa valeur ; nous pouvons aussi, si la droite est AB, la plier en amenant B sur A (fig. 36) ; mais, graphi-

quement, il existe une méthode calquée sur le problème précédent et qu'on peut toujours employer : du point A, je décris un arc de cercle de rayon *plus grand que la moitié* de AB; j'en fais autant au-dessous de la droite; je répète cette opération en partant de B. Je joins les points d'intersection C et D; le point M où CD rencontre AB est le milieu de AB.

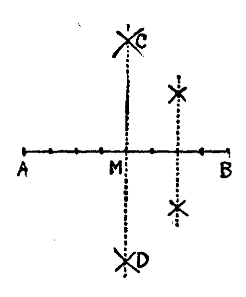


Fig. 36. — Procédé pour partager une droite en 2, 4, 8 parties égales.

Ce procédé nous donne en même temps le moyen d'élever une perpendiculaire au milieu de AB, puisque C et D sont situés sur cette perpendiculaire.

21 Enfin la même méthode permet de diviser une droite en 2, 4, 8, 16 parties, etc... égales, puisqu'il suffit pour chaque tronçon d'opérer comme la première fois (v. aussi fig. 34).

Élever une perpendiculaire à une droite sur le terrain.

22. Ici, les arpenteurs et les géomètres se servent d'une équerre spéciale · C'est une boîte en métal offrant des ouvertures (fentes longitudinales), étroites, percées à angle droit (fig. 37) sur les côtés de la boîte

On arrive au même résultat avec une planchette sur laquelle on a tracé deux perpendiculaires portant des aiguilles ou des épingles à leurs extrémités. Après avoir mis AB dans la direction de la base à l'aide de jalons posés sur le terrain, on vise en CD et on fait planter un 3ᵉ jalon dans cette direction (fig. 38).

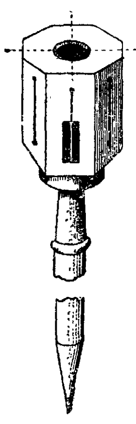


Fig. 37.
Equerre d'arpenteur.

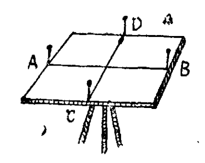


Fig. 38.
Equerre d'arpenteur facile à construire.

Les menuisiers ont aussi des équerres spéciales, dites à chapeau, qu'ils font glisser sur le bord d'une planche, lorsqu'ils veulent y élever des perpendiculaires.

Construire un angle égal à un angle donné.

23. *1ʳᵉ méthode.* — Au moyen du rapporteur, on évalue l'angle donné; après lecture, il est facile de reproduire cet angle sur une autre droite.

2ᵉ méthode. — Le premier procédé n'est qu'approximatif, car la lecture d'un angle où il faudrait évaluer des minutes devient pratiquement impossible. Il vaut donc mieux recourir à un procédé graphique.

Soit l'angle A à reproduire (fig. 39). Du point A, je trace un arc de cercle coupant les deux côtés en B et en C.

Je reporte ce même arc de cercle sur la 2e droite A'B' où je veux reproduire le premier angle (fig. 40).

Je mesure BC avec mon compas ; j'ai bien la vraie distance de B à C. En Géométrie, BC s'appelle *corde*

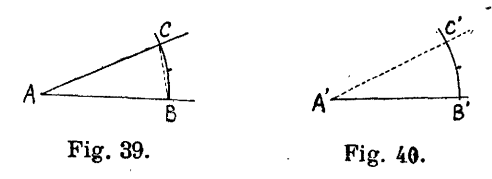


Fig. 39. Fig. 40.

de l'arc correspondant ; or, si nous nous reportons à la figure 26 du n° 14, nous voyons immédiatement qu'*aux mêmes cordes correspondent les mêmes arcs*, pour une même circonférence bien entendu, puisque les deux parties droite et gauche de la figure 26 peuvent se rabattre l'une sur l'autre.

Je porterai donc BC en B'C', c'est-à-dire qu'avec mon compas décrivant une circonférence de rayon BC, je couperai l'arc aboutissant à B' par un second arc en C'. De ce dernier point, je tirerai C'A' et j'aurai ainsi reproduit l'angle A.

Mener la bissectrice d'un angle donné.

24. Soit toujours l'angle A (fig. 41). Je trace un arc quelconque BC de centre A, puis la corde correspondante. J'ai un triangle isocèle dont BC est la base ;

les deux côtés AB et AC sont égaux comme rayons d'une même circonférence. Il s'ensuit que la hauteur issue de A et tombant sur la base CB est bissectrice en même temps (nº 14). Je ne la connais pas, mais je sais que cette hauteur est aussi une médiane, donc qu'elle tombe sur le milieu de CB. Dès lors je suis ramené à un problème connu (nº 20) et il s'agit de diviser CB en 2 parties égales. Le point A étant nécessairement sur la perpendiculaire qui passe par le milieu de CB (lieu géométrique), il suffit de décrire de C et de B deux arcs se coupant à l'extérieur : soit D leur intersection. Je joins DA par une droite qui est bien la bissectrice de A.

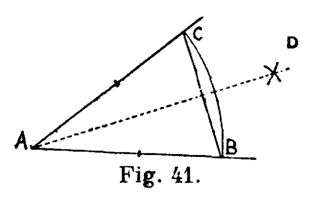


Fig. 41.

CONSTRUCTIONS DE TRIANGLES

Un triangle ne peut être déterminé et construit que si l'on vous donne trois éléments, par exemple :

1 côté et 2 angles ;

2 côtés et 1 angle ;

3 côtés.

Construire un triangle connaissant un côté (la base) et les deux angles adjacents à la base.

25. Soit le côté AB = 25 mm ;

Angle A = 45° ;

Angle B = 53° (fig. 42).

Sur une droite indéfinie (fig. 43), je porte 25 mm. A l'une des extrémités je fais l'angle A = 54° et je mène le côté issu de A. Je fais de même pour B' = 53°. Je

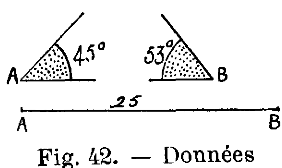


Fig. 42. — Données du problème.

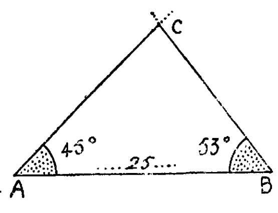


Fig. 43. — Triangle obtenu.

prolonge les côtés autant qu'il est nécessaire; le point d'intersection C est le 3e sommet du triangle demandé.

Il est de toute évidence que si la construction est exactement faite, je reproduirai sans cesse le même triangle; il n'y a donc qu'une solution. J'en conclus que :

Si des triangles ont un côté égal adjacent à des angles égaux chacun à chacun, ces triangles sont égaux. C'est ce qu'on appelle en Géométrie le *premier cas d'égalité* de triangles.

Construire un triangle connaissant deux côtés et l'angle compris.

26. Soit A = 42°, l'angle compris entre les deux côtés : AB = 20 mm et AC = 13 mm (fig. 44). Je com-

mence par tracer l'angle de 42° en prolongeant suffisamment les côtés (fig. 45). Sur l'un d'eux je prends

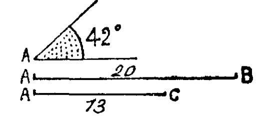


Fig. 44. — Données du problème.

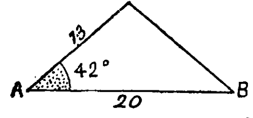


Fig. 45. — Triangle obtenu.

20 mm ; sur l'autre 13 mm. J'obtiens les sommets B et C que je joins par une droite.

Ici encore, une seule solution possible. Donc :

Si des triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun compris entre un angle égal, ces triangles sont égaux (2e *cas d'égalité*).

Construire un triangle connaissant ses trois côtés.

27. Soient AB = 18 mm ; BC = 10 mm ; AC = 19 mm (fig. 46). Je trace AC = 19 mm (fig. 47). A

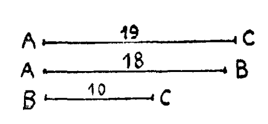


Fig. 46. — Données du problème.

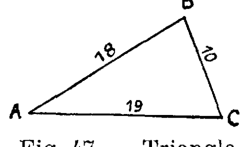


Fig. 47. — Triangle obtenu.

son extrémité A, je décris un arc de circonférence ayant 18 mm de rayon. En C, je décris un arc de

10 mm. L'intersection des deux arcs me donne le point B, 3e sommet, et il n'y a qu'une seule solution possible. Donc *lorsque deux triangles ont leurs côtés égaux chacun à chacun ils sont égaux* (*3e cas d'égalité*).

28. Si les *triangles sont rectangles*, il suffit de *deux* éléments, puisque l'angle droit est alors de rigueur et compte pour un élément.

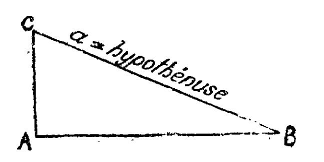


Fig. 48. — Triangle rectangle avec son hypothénuse.

Dans ce genre de triangles, les deux côtés perpendiculaires l'un sur l'autre s'appellent *côtés de l'angle droit*, et le côté opposé à l'angle droit se nomme *hypothénuse* (qui veut dire *sous-tendre*). Nous reviendrons plus loin sur les cas d'égalité des triangles rectangles. Avant de les aborder, il nous faudra encore acquérir des notions nouvelles (v. fig. 48 et 49).

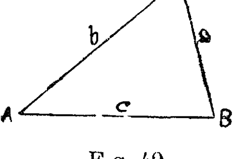


Fig. 49.

La lettre A est toujours réservée pour le sommet de l'angle droit.

De même, par convention et pour simplifier, on a pris l'habitude de désigner les côtés d'un triangle par les lettres *a*, *b*, *c*, en ayant soin d'appeler *a* le

côté opposé au sommet A ; *b*, le côté opposé à l'angle B, et *c* celui qui est opposé à C. D'après ces remarques, l'hypothénuse d'un triangle rectangle, toujours opposée au sommet de l'angle droit A, doit être désignée par *a* (v. fig. 48).

Problème.

29. *Deux villages A et B situés à une certaine distance d'une rivière qui les sépare veulent se relier par un pont qu'ils construiront à frais communs. Où faudra-t-il placer le pont pour que ce dernier soit à égale distance de chaque village?* (v. fig. 50).

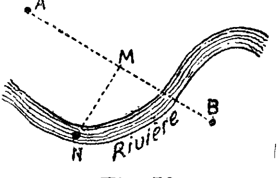


Fig. 50.

Solution : Joignons A et B par une droite. En son milieu M, élevons la perpendiculaire ; le point N où la perpendiculaire rencontrera la rivière sera le point où le pont devra être construit. Ce point N se trouve en effet sur le lieu géométrique des points également distants de A et de B (n° 19).

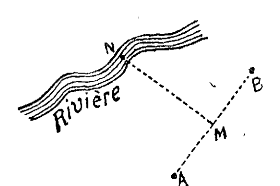


Fig. 51.

30. Même solution au cas où les deux villages seraient situés du même côté de la rivière. On joint A et B et on élève une perpendiculaire sur le milieu M

(fig. 51). N est encore l'endroit désigné pour l'emplacement du pont.

31. *Un angle étant donné sur le terrain, le diviser en deux parties égales.* On portera deux longueurs égales à partir du sommet A (fig. 52) sur chacun des côtés. Soient AB et AC ces longueurs. On joindra BC par une droite qu'on mesurera et on en prendra la moitié.

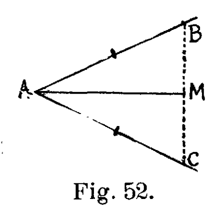


Fig. 52.

La droite AM qui passe par le milieu M de BC, divise l'angle en deux parties égales, car elle est la médiane du triangle ABC qui est isocèle (n° 14).

Par deux points A et B faire passer une circonférence (fig. 53).

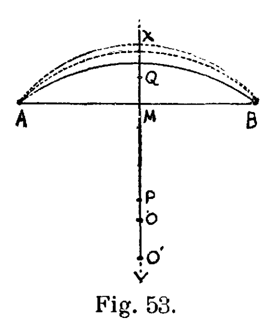


Fig. 53.

31. *Solution* : ce problème n'est qu'une variante du précédent, mais ici il y a un nombre indéfini de solutions. En effet, tous les points de la perpendiculaire XY élevée au milieu M de AB, sont équidistants de A et de B. On peut le vérifier en mettant la pointe du compas en un point quelconque O, par exemple ; toute circonférence passant par A passe aussi par B ; même résultat pour les centres O'P,Q,etc

32. *On demande de déterminer avec quel rayon a été décrite une partie circulaire de chemin de fer,*

Prenons 3 points quelconques sur cette partie circulaire. Soient A, B, C (fig. 54). Joignons-les par des cordes. L'intersection O des perpendiculaires élevées sur les milieux M de A B et M' de B C sera le centre de la circonférence qui représente cette partie circulaire. En effet O est à égale distance de A et de B, d'après le problème précédent ; mais il est aussi à égale distance de B et de C. A O sera le rayon de la circonférence.

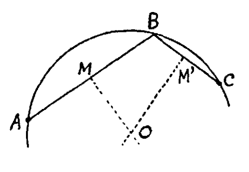


Fig. 54.

33. Conclusion : 1° *Par trois points non en ligne droite, on peut toujours faire passer une circonférence.*

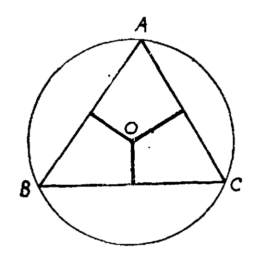


Fig. 55.

2° *Les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés d'un triangle concourent en un même point.* En effet (fig. 55) par les sommets d'un triangle on peut toujours faire passer une circonférence, nous venons de le voir ; le centre O sera donc le point de concours des perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés.

34. *Trouver la somme de trois angles qui ont respectivement : 25°42′15″ ; 47°35′29″ ; 82°0′54″*. On consultera pour tous les problèmes de ce genre *Pour comprendre l'Arithmétique* ; nous y avons donné en effet, la marche à suivre lorsqu'on effectue des opérations sur les nombres complexes.

Réponse : 153°18′38″.

35. *Quel est le complément de l'angle de 43° ?*

Le complément d'un angle est ce qui lui manque pour valoir un angle droit ou 90° (n° 8) ; nous écrirons donc 90° — 43 = 47°.

36. *Quel est le complément d'un angle de 67°28′ ?*

Réponse : 90° — 67°28′ = 22°32′.

37. *La latitude de Paris est de 48°50′11″, quelle est sa distance au pôle ?*

Solution : La latitude d'un lieu est sa distance à l'équateur, distance comptée en arc sur le méridien du lieu. De l'équateur au pôle, il y a 90°. La distance d'un lieu quelconque au pôle est donc le complément de sa latitude ; on aura donc pour distance de Paris au pôle : 90° — 48°50′11″ = 41°9′49″.

38. *Quel est le tiers de l'angle de 25°42′ ?*

Réponse : 8°34′.

39. *Quel est le supplément de l'angle de 92°42'13"?*

Réponse : Le supplément d'un angle est ce qui lui manque pour valoir 2 droits ou 180° (n° 8); on aura donc 180° — 92°42'13" = 87°17'47".

IIᵉ LEÇON

PROJECTION, SYMÉTRIE, PARALLÉLISME

Nous avons vu au chapitre précédent comment, en un point donné d'une droite, on peut *élever* une perpendiculaire à cette droite ; il faut maintenant examiner un cas à peu près analogue et chercher comment, d'un point pris *en dehors* d'une droite, on *abaisse* une perpendiculaire sur cette droite.

Comment on abaisse une perpendiculaire.

40. Reprenons une feuille de papier blanc, sur laquelle nous tracerons une droite XY (fig. 56). Marquons à l'aide d'une épingle, un point A pris hors de la droite, au-dessus par exemple. Maintenant, plions notre feuille en rabattant la partie supérieure sur la partie inférieure, la droite XY nous servant de charnière ; A vient en A′ ; pointons de nouveau avec l'épingle de manière à retrouver ce point A′, notre

papier étant déplié. Joignons A et A′ par une droite, cette droite est perpendiculaire à XY.

La preuve est facile à fournir : rabattons de nouveau ; A revient en A′ ; le point B qui doit être le *pied* de la perpendiculaire n'a pas bougé ; donc B A, coïncide avec B A′, donc l'angle 1 recouvre l'angle 2 et lui est égal. Il s'ensuit que X B détermine sur A A′ deux angles adjacents égaux qui, par conséquent, répondent bien à la définition de l'angle droit et dont les côtés sont perpendiculaires l'un sur l'autre.

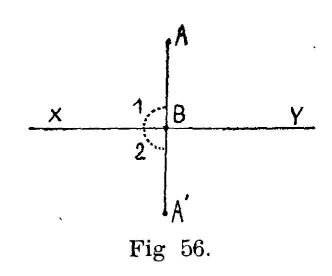


Fig 56.

41. Maintenant je vais vous démontrer que AB est la plus courte distance de A à la droite X Y, car A B est plus petite que n'importe quelle droite tombant ailleurs, en C par exemple (fig. 57).

Traçons faiblement à l'encre A C et rabattons ; déplions de nouveau : A C a laissé sa trace en C A, elle s'est doublée. Mais pour aller de A en A′, le plus court chemin est de suivre la ligne droite A B A′ et non de passer par C ; or A C A′ est forcément une ligne brisée, puisqu'elle est différente de A B A′ (ligne droite) et qu'on ne peut mener qu'une droite de A à A′. Mais

si A B A′ est plus petite que A C A′ la moitié de la première sera aussi plus petite que la moitié de la seconde ; donc je conclus que A B (moitié de A B A′) est plus petite que A C (moitié de A C A′).

Ainsi, non seulement A B est la plus courte distance de A à la droite XY, mais nous avons démontré par là même que *la perpendiculaire* A B, *abaissée du point* A *sur* Y X *est unique.*

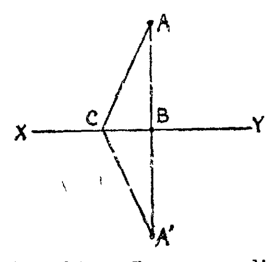


Fig. 57. — La perpendiculaire est plus courte que toute oblique.

Nous savions que la *distance* d'un point à un autre, ce qui veut toujours dire en Géométrie distance *la plus courte* sous-entendu, est la droite qui joint les deux points ; nous saurons désormais que la *distance* (la plus courte) *d'un point à une droite est la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite.*

Nous avons appris en même temps, et sans grand effort de raisonnement, que d'un point pris hors d'une droite, on ne peut abaisser qu'une seule perpendiculaire à cette droite.

Toutes les autres droites qui joindraient, sur la figure précédente, le point A à X Y, comme en A C, seraient plus grandes que la perpendiculaire. On dit alors qu'elles sont des *obliques* et vous comprenez

maintenant la signification de cette phrase que vous trouverez dans tous les traités de Géométrie : *la perpendiculaire est plus courte que toute oblique.*

Autre méthode pour abaisser une perpendiculaire.

42. Maintenant, pour vous reposer, je vais vous enseigner un procédé graphique très simple qui vous permettra d'abaisser une perpendiculaire (v. fig. 58).

Du point donné A, où vous appuierez une branche de votre compas, décrivez un arc de cercle qui coupera la droite XY en B et en C, par exemple. Prenez maintenant la moitié de BC, soit A′ son milieu ; voilà le *pied* de la perpendiculaire cherchée.

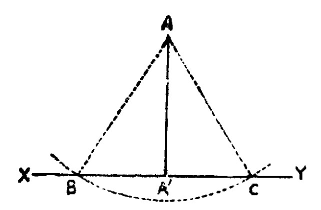


Fig. 58. — D'un point extérieur, abaisser une perpendiculaire à une droite.

Essayez de deviner pourquoi?... C'est plus simple que vous ne le supposez. Tirons A B et A C ; ces droites sont égales, puisque ce sont des rayons de la circonférence dont vous avez décrit un arc. Alors le triangle possède deux côtés égaux et vous l'appelez... isocèle. Mais nous avons vu (n° 14) que dans un triangle de ce genre la *médiane* se confond précisément avec la *hauteur*, qui est, par définition, *perpendiculaire* à la base ; et voilà pourquoi je vous ai fait prendre la moitié de cette base BC.

43. Autre constatation, pendant que nous y sommes : A B et A C sont des obliques égales par rapport à A A′ perpendiculaire et vous pouvez voir que leurs pieds B et C sont à égale distance de A′. Donc nous pouvons conclure encore ceci : *si des obliques sont égales, elles s'écartent également du pied de la perpendiculaire.*

Vous voyez, qu'en Géométrie, tout s'enchaîne et que, de déductions en déductions, on peut aller fort loin.

44. Maintenant, revenons à quelques définitions qui nous permettront encore d'avancer. Nous avons dit que l'endroit où la perpendiculaire abaissée de A rencontre XY, s'appelle le *pied* de la perpendiculaire (fig. 59). Ce *pied* porte quelquefois un autre nom : les géomètres disent volontiers qu'il est la *projection* du point A sur la droite XY et

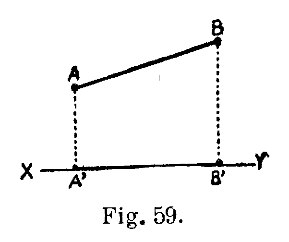


Fig. 59.

on l'affecte dans ce cas de la même lettre avec une apostrophe, soit A′ (ce qui se prononce A prime, nous l'avons déjà vu en Algèbre). Ainsi A′ est la projection de A ; la perpendiculaire s'appelle dans ce cas la *projetante* du point A.

Traçons maintenant une droite A B en dehors d'une droite X Y, puis abaissons les perpendiculaires A A′

et B B′ sur X Y, la partie A′ B′ comprise entre les pieds de ces perpendiculaires s'appelle *projection* de la droite A B sur X Y (fig. 59).

45. Ces définitions vont nous fournir une autre notion : celle de la *symétrie*. Plions notre papier autour de XY comme charnière : A vient en A″, B en B″ et la droite A B imprime sa trace sous forme d'une droite qui lui est égale A″ B″ (fig. 60).

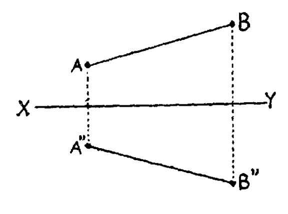


Fig. 60.

Dans ces conditions, je dirai que A″ B″ est la symétrique de A B. (A″ et B″ se prononcent A seconde et B seconde.)

De même le point A″ est le symétrique de A et B″ le symétrique de B.

Ainsi, pour avoir un point symétrique par rapport à une droite, il suffit d'opérer un rabattement ou bien d'abaisser une perpendiculaire et de la prolonger d'autant de l'autre côté de la droite.

Ce sont ces notions que les dessinateurs mettent à profit pour inventer des figures qui ont le plus souvent un bel aspect. Sur un papier blanc et mince dessinez des courbes quelconques (fig. 61) ; pliez votre papier autour d'une droite quelconque A B et calquez vos pre-

mières courbes : dépliez maintenant, vous obtiendrez une figure symétrique. Une circonférence est une figure symétrique : vous pouvez vous en assurer en la pliant suivant un diamètre quelconque ; si vous abaissez des perpendiculaires de différents points de cette circonférence sur le diamètre choisi, chacun de ses points aura son symétrique sur la moitié correspondante (fig. 62).

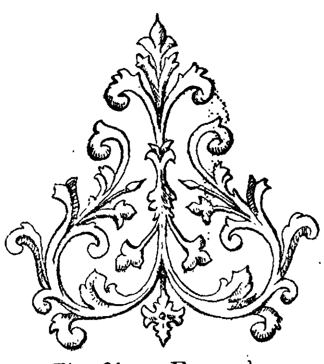


Fig. 61. — Exemple de dessin symétrique.

Un triangle isocèle est aussi une figure symétrique. Il vous suffira pour vous en rendre compte de le plier suivant sa hauteur ; c'est d'ailleurs ce que nous avons déjà fait (nº 14).

De même, tous les objets reflétés par une glace et dont l'image est inversée sont reproduits en symétrie, et c'est un jeu très amusant que de dessiner des figures quelconques et de les présenter devant une glace, en faisant coïncider des axes de symétries arbi-

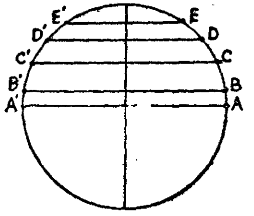


Fig. 62. — Une circonférence est une figure symétrique.

trairement choisis, avec la surface d'un miroir. Essayez en tenant votre papier perpendiculairement à la glace, vous serez étonnés des effets réalisés. Les taches et les dessins les plus informes prennent immédiatement un aspect extraordinaire et qui parfois ne manque pas d'élégance.

Vous voyez bien que la Géométrie n'est pas la science fastidieuse qu'on vous avait dépeint ; seulement, comme toutes les sciences, elle demande à être vue en artiste. Si vous l'abordez dans cet esprit, elle vous comblera ; vous y goûterez des joies intellectuelles inconnues et vous comprendrez toute la portée des expressions du savant Newcomb qui parlait sans cesse du « pays féerique de la Géométrie ».

L'artiste n'est pas seul d'ailleurs à apprécier les beautés de cette science : on rapporte que Platon qui enseignait la philosophie avait écrit au péristyle de sa demeure : « Nul n'entre ici s'il n'est Géomètre » et c'était avec raison, car les bases mêmes de la Géométrie sont bien faites pour intriguer l'esprit des plus grands philosophes. Nul sujet en effet n'a donné lieu à des discussions aussi vives et aussi passionnées. L'étude des parallèles que nous allons aborder est tout à fait de nature à vous en convaincre.

46. Vous savez tous ce que l'on entend par *parallèles : ce sont des droites qui, situées dans un même plan, ne*

se rencontrent jamais, aussi loin qu'on les prolonge. J'ai dit, *situées dans un même plan,* et ceci est nécessaire à la définition, car on peut fort bien imaginer des droites dans des plans différents, qui ne sauraient se rencontrer, les barreaux d'un tabouret par exemple qu'on aurait placés à des hauteurs différentes (fig. 63).

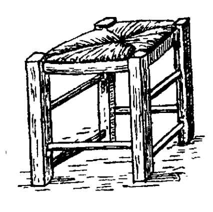


Fig. 63.

Au contraire les barres d'une grille en fer bien plane sont l'image de droites parallèles (fig. 63 *bis*).

Mais comment, direz-vous, prouver que de telles droites existent réellement ; l'espace dont nous disposons est bien limité ; qui sait

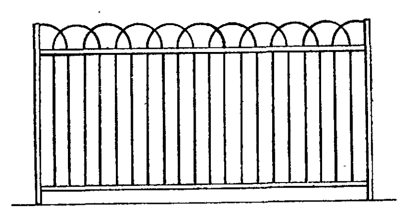


Fig. 63 *bis.* — Exemples de parallèles : les barreaux d'une grille.

si des parallèles ne finiraient pas par se rencontrer, au cas où on les prolongerait indéfiniment ?

Eh bien, nous allons prouver qu'il peut parfaite-

ment exister des droites de ce genre, c'est-à-dire qui ne se rencontrent jamais,

D'un point A pris hors d'une droite X Y abaissons la perpendiculaire sur cette droite (fig. 64); c'est un exercice que nous venons de faire; soit A B cette perpendiculaire.

Maintenant du point A, élevons une seconde perpendiculaire sur la première A B; soit A C cette perpendiculaire. *Je dis que* A C *est parallèle à* X Y et nous le verrons bientôt.

D
A C
X Y
B

Fig. 64.

Vous trouvez que cette figure est longue à construire : voici un moyen plus expéditif. Repliez votre droite XY sur elle-même, de façon que le pli passe par le point A et prolongez ce pli plus loin que A, jusqu'en D. Maintenant pliez de nouveau, cette fois en rabattant non de droite à gauche, mais de haut en bas, de manière que la portion de droite au-dessus de A s'applique sur la partie au-dessous de ce même point. Dès lors D A vient coïncider avec A B. Formez un second pli, vous obtenez A C qui est la parallèle demandée.

Pourquoi cette droite A C est-elle parallèle à X Y ou ce qui revient au même à B Y ?

Cherchez, vous ne le devinerez pas... et il est préférable que je vous en donne immédiatement la raison...

la même d'ailleurs qu'Euclide a imaginée... à moins que ce ne soient ses prédécesseurs.

Notez qu'il suffit, somme toute, de prouver que A C ne peut jamais rencontrer B Y. Imaginons en effet, pour un instant — pour voir, comme disent les enfants — que ces deux droites se rencontrent ; soit M le point d'intersection, aussi éloigné que vous le voudrez. Qu'arrivera-t-il ? Cette conséquence nécessaire : que du point M, nous pourrons abaisser sur la droite A B *deux* perpendiculaires. Or, nous savons bien, par ce que nous avons déjà démontré (nº 41) que ceci est impossible.

Ainsi, force nous est de conclure que si les droites BY et AC sont toutes les deux réellement menées perpendiculaires à la troisième droite A B, dans un même plan, elles ne pourront jamais se rencontrer et seront nécessairement parallèles.

47. Ainsi raisonna Euclide, et il raisonna bien, lorsqu'il entreprit de démontrer la possibilité de l'existence des parallèles, mais il ne s'en tint pas là et il essaya de prouver davantage.

En effet, le théorème auquel je fais allusion s'énonçait ainsi :

Par un point pris hors d'une droite : 1º on peut mener une parallèle à cette droite ; 2º on n'en peut mener qu'une.

Euclide a bien démontré la première partie de la proposition et c'est ce que nous avons fait en l'imitant, mais lorsqu'il en vint à la seconde, il ne put, malgré tous les artifices, arriver à un résultat satisfaisant.

Finalement, il *demanda* qu'on voulût bien lui accorder que cette seconde partie : « *on ne peut mener qu'une seule parallèle à la droite* » était aussi légitime que la première ; de là le nom de *postulatum* (de *postulare*, demander) donné à cette deuxième proposition.

Depuis, penserez-vous avec raison, la Géométrie a fait de grands progrès. Je vous l'accorde ; néanmoins, aucun géomètre n'est arrivé à la démonstration du fameux *postulatum* d'Euclide. Ici je m'explique, car le cas en vaut la peine ; on est bien arrivé, en fait, à démontrer ce *postulatum*, mais toujours, en s'appuyant sur un autre *postulat* indémontrable. Postulat pour postulat, autant garder l'ancien. On trouvera peut-être un moyen, objecterez-vous. Pas le moins du monde ; la partie est jugée depuis que notre grand mathématicien, le regretté Henri Poincaré, a démontré qu'il y aurait toujours un postulat à la base de notre Géométrie. Et il en est ainsi simplement parce que toutes nos démonstrations, tous nos théorèmes, tous nos raisonnements ont besoin pour exister de s'appuyer sur la notion du plan, notion qui nous a paru précise lorsque nous

l'avons donnée, mais qui, en réalité, est basée sur la ligne droite.

Un plan, avons-nous dit en substance, est une surface telle, qu'une ligne droite joignant deux quelconques de ses points y est contenue tout entière. Parfait, mais nous attendons encore qu'un mathématicien plus habile et plus philosophe que les autres, nous dise en quoi consiste essentiellement une ligne droite. Ici, nous entrons dans les arcanes même de la philosophie, car nous touchons aux mystères de l'espace et de l'étendue.

48. Je vous entends me répondre que ces discussions vous importent peu ; je veux bien le croire, mais si je les ai soulevées, cela n'a pas été sans dessein de ma part. Mon but était tout d'abord de vous amener peu à peu à comprendre la tendance de la science moderne à concevoir notre Géométrie, qu'elle appelle *Euclidienne*, comme un cas très particulier des lois qui régissent ce que nous appelons l'Étendue. On peut fort bien admettre des systèmes de Géométrie où le *postulatum* d'Euclide n'est pas respecté et la preuve, c'est qu'à l'heure actuelle, les mathématiciens ont construit des édifices aussi solides que les respectables éléments d'Euclide et où l'on suppose précisément qu'on peut mener plus d'une parallèle à une droite, en un point donné ; simple construction logique,

peut-être ; n'empêche que les savants sont bien embarrassés pour démontrer au nom de la logique, quelle Géométrie doit être préférée.

Poincaré disait : « Gardons la géométrie euclidienne qui est la plus commode. » Cela paraît évident, mais conservons-la aussi parce qu'elle semble bien répondre à l'expérience usuelle et j'ajouterai, au bon sens, ce qui est loin d'être négligeable.

Quoi qu'il en soit, la morale de l'histoire, et ce sera une deuxième constatation, est que l'on commet une erreur colossale lorsqu'on prétend que les sciences mathématiques sont plus exactes que les autres.

La Géométrie, par exemple, qui nous apparaît comme un modèle de logique et d'enchaînement, ne repose en fait que sur des postulats indémontrables ; et dans les sortes de sciences prétendues exactes, si l'on veut avancer il faut partir de vérités d'ordre expérimental, de notions qu'on ne peut définir, de principes qu'on ne peut démontrer ; la supériorité des mathématiciens sur les physiciens, les historiens, les philosophes, les moralistes et les théologiens, au sujet de la base même de leurs croyances et du bien-fondé de leurs conclusions est donc purement illusoire. Ces réflexions que j'ai déjà développées dans la première édition de mon ouvrage *Que deviendrons-nous après la mort ?* (1913), où j'examinais les fondements de notre Géométrie, ces réflexions dis-je, sont maintenant

admises par tous les savants. Raison de plus pour cultiver en Géométrie, comme nous le faisons en ce volume, la *méthode expérimentale*.

Une aussi longue digression nous a bien éloignés de nos démonstrations sur les parallèles, mais elle était nécessaire pour que vous compreniez en quoi consiste véritablement la base même de la Géométrie ; elle nous a appris aussi que la modestie doit être la principale vertu de l'homme de science ; mieux que personne, comme le disait Fabre, l'éminent entomologiste de Sérignan, « le savant sait qu'il ne sait rien » et qui plus est il n'en ignore pas les raisons. Pour nous, délaissant désormais les grandes discussions philosophiques, nous revenons à la vieille géométrie d'Euclide, non parce qu'elle est la plus commode, suivant le mot de Poincaré, mais parce qu'en fait, c'est elle qui s'accorde le mieux avec nos mesures et nos expériences terrestres.

Les triangles rectangles.

49. Faisons maintenant, pour nous reposer, deux constructions de triangles qui nous seront d'une grande utilité dans l'étude plus complète des parallèles.

Supposons qu'on vous demande de construire un triangle rectangle dont l'hypothénuse aura 26 mm. et l'un des angles 35 degrés (fig. 65). Comment vous y

prendriez-vous ? Evidemment, sans hésiter, vous formeriez un angle de 35° et sur un des côtés prolongés vous porteriez 26 mm., longueur de $a =$ hypothénuse (fig. 66); maintenant, vous savez que l'angle A. opposé à l'hypothénuse, est

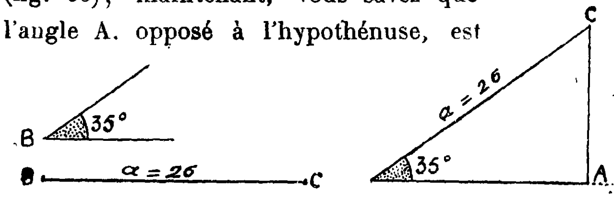


Fig. 1.
Données du problème.

Fig. 2.
Triangle construit.

droit ; il faut donc du point C extrémité de a, abaisser la perpendiculaire sur BX. Cela n'est point pour nous embarrasser, puisque nous l'avons fait au commencement de ce chapitre (n° 40). Soit CA cette perpendiculaire. Notre triangle est construit et nous pouvons remarquer qu'avec les éléments fournis, il nous serait tout à fait impossible d'en construire un autre, à moins de considérer celui qu'on pourrait dessiner au-dessous de BA, en rabattant le point C, mais nous n'obtiendrions ainsi que son symétrique, son image, qui lui serait égale par conséquent, puisqu'au fond ce ne serait que le triangle ABC, vu dans une glace et retourné.

Nous pourrons donc conclure que :

Si deux triangles rectangles ont l'hypothénuse égale

et un angle aigu égal, ces deux triangles sont égaux C'est ce que l'on appelle le *premier cas d'égalité des triangles rectangles* et je vous ferai observer que, là encore, nous avons bien 3 éléments donnés : un côté égal, l'hypothénuse ; un angle aigu égal, et le troisième ? C'est l'angle droit qui est sous-entendu et compris dans l'énoncé, dès lors qu'il s'agit de triangle *rectangle.*

51. Si l'on vous avait donné l'hypothénuse et un côté de l'angle droit, le problème eût été encore plus simple.

Soient : a l'hypothénuse qui doit avoir 23 mm et b le côté qui aura 12 mm. (fig. 67).

$b = 12$

$a = 23$

Fig. 67. — Données du problème.

Vous commencerez par dessiner un angle droit qui représentera l'angle A de votre triangle rectangle. (fig. 68). Comptez 12 mm. sur l'un des côtés ; soit $b = AC = 12$. De l'extrémité C, décrivez avec un

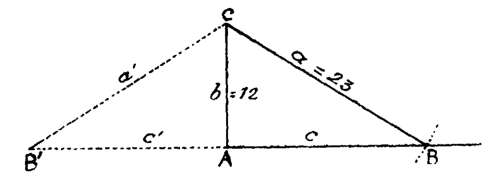


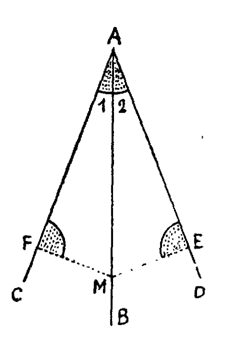
Fig. 68. — Triangle construit.

rayon de 23 mm. un arc de circonférence, au moyen du compas, et coupez le second côté de l'angle droit par cet arc ; le point d'intersection B vous donnera le troi-

sième sommet. Vous auriez pu construire A B sur la gauche au lieu de la dessiner à droite, vous auriez obtenu le même triangle renversé, symétrique, mais cela n'aurait rien changé d'essentiel : CB′ et CB seraient toujours égaux, donc s'écarteraient également du pied de la perpendiculaire et c' eût été égal à c.

Concluons donc que *si deux triangles rectangles ont une hypothénuse égale et un côté de l'angle droit égal ils sont nécessairement égaux* (2e *cas d'égalité des triangles rectangles*).

51. Voici immédiatement une application du premier cas : Traçons un angle A quelconque (fig. 69), menons sa bissectrice A B; non seulement cette dernière divisera l'angle en deux parties égales, suivant sa définition, mais *chacun de ses points* sera à *égale distance des deux côtés de l'angle*.



Fig, 69.

Il suffit en effet pour nous en assurer de choisir sur la bissectrice un point quelconque M, par exemple ; la distance de M à A D est la perpendiculaire *abaissée* de ce point sur le côté, soit ME ; le même MF sera la plus courte distance de M à A C (nº 41). Prouvons que ces distances sont égales.

En effet, les triangles formés sont rectangles (en E et en F) mais les angles en A sont égaux : 1 = 2 à cause de la bissectrice et AM est l'hypothénuse commune. Donc les 2 triangles ayant une hypothénuse égale et un angle aigu égal, sont égaux (d'après le 1er cas d'égalité des triangles rectangles n° 49).

Nous dirons donc que *la bissectrice d'un angle est le lieu géométrique des points équidistants des deux côtés de cet angle.*

52. Revenons maintenant à nos parallèles que nous avons appris à construire. Nous savons que si nous coupons 2 parallèles par une troisième droite perpen-

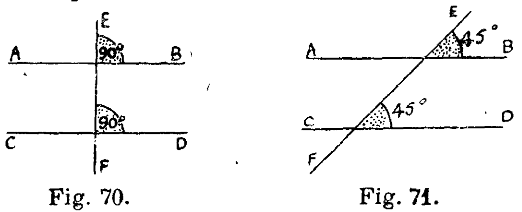


Fig. 70. Fig. 71.

diculaire à l'une, cette droite sera perpendiculaire à l'autre (n° 46). Ainsi EF qui fait 90° avec AB (fig. 70), coupe aussi sa parallèle CD en faisant un angle égal à 90°. Cela nous l'avons démontré (n° 46) ; eh bien, nous pouvons généraliser cette proposition et dire ceci : *Lorsqu'une droite coupe une autre droite suivant une certaine inclinaison, elle coupe toutes ses parallèles suivant cette même inclinaison.*

Exemple : EF coupe AB suivant une inclinaison de 45° (fig. 71), elle coupera sa parallèle CD suivant ce même angle de 45°. C'est l'évidence même, penserez vous, puisque la deuxième droite CD *a la même direction* que la première AB, et je suis tout à fait de votre avis ; toutefois, nous pouvons en donner une démons tration rigoureuse.

53. Mais auparavant, pour bien nous entendre, nous allons numéroter les angles et leur donner un nom. Soient encore nos deux droites parallèles (fig. 72) ; la *troisième* droite qui les coupe s'appellera *sécante* (du latin, *secare*, couper; *sécateur* vient de ce mot). Cette sécante donne naissance à 8 angles, 4 avec la première droite, 4 avec la seconde, et ce sont ces angles qui ont reçu des noms spéciaux.

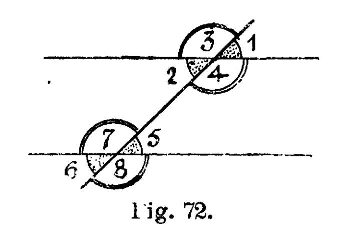


Fig. 72.

Les angles 1 et 5 sont appelés *correspondants*; ils s'emboitent pour ainsi dire, ils se correspondent.

Il en est de même de 3 et de 7 ; de 2 et de 6 ; de 4 et de 8 qui sont correspondants deux à deux.

Quant à ceux qui sont extérieurs et de chaque côté de la sécante, comme 6 et 1, 8 et 3, on les dit *alternes-externes*.

Enfin, 2 et 5 intérieurs, ainsi que 4 et 7, sont *alternes-internes*.

Eh bien, ces angles sont égaux entre eux par paires ; c'est-à-dire que les correspondants sont égaux :

$$1 = 5 \text{ par exemple.}$$

Les alternes-externes sont égaux :

$$1 = 6 \text{ par exemple.}$$

Les alternes-internes sont égaux :

$$5 = 2 \text{ par exemple.}$$

54. Démontrons ce dernier cas ; les autres viendront sans effort. Reprenons une nouvelle figure, moins embrouillée (fig. 73). Je dis que $2 = 5$. Je commence par prendre le milieu de AB, portion intérieure de la sécante. De ce point j'abaisse sur les parallèles une perpendiculaire commune.

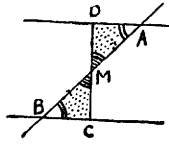


Fig. 73.

J'obtiens ainsi 2 triangles rectangles égaux. En effet, leurs hypothénuses sont égales : MA = MB, puisque AB a été divisé en 2 parties égales. Mais je remarque aussi que les angles aigus en M sont égaux comme opposés par le sommet.

Ainsi : hypothénuse égale, angle aigu égal, voilà qui rentre dans le 1er cas d'égalité des triangles rectangles (n° .9). Donc $2 = 5$ nécessairement.

Maintenant, reprenez la première figure (fig. 72). Si

2 = 5, 7 = 4, car 7 est le supplément de 5 et 4 également puisqu'il est le supplément de 2 qui égale 5.

En d'autres termes, si 2 et 5 égalent 30°, il est évident que leur suppléments 4 et 7 vaudront 180° — 30 = 150°.

De même, il ne sera pas difficile de prouver que 1 égale 5, son correspondant : en effet, 1 = 2 comme opposés par le sommet et 2 = 5 (ceci est prouvé). Donc 1 = 5.

Enfin 1 = 6 ; car 1 = 2 = 5 = 6.

Vous le voyez, c'est la simplicité même ; il suffit d'un peu d'attention et surtout d'avoir soin de ne pas confondre les dénominations.

55. Il suit de ce théorème que si nous avons la figure **74**, dans laquelle deux angles sont emboîtés, c'est-à-dire ont leurs côtés parallèles 2 à **2**, ces angles seront encore égaux.

Fig. 74.

En effet, 1 = 2 et je vais le prouver. Pour cela, je prolonge un des côtés de 1 jusqu'à ce qu'il coupe un des côtés de 2 ; j'obtiens l'angle 3.

Mais 1 = 3 comme correspondants ;

et 3 = 2 comme correspondants encore.

Donc 1 = 3.

Tout ce qui précède est plus long à expliquer qu'à

comprendre ; et ces considérations nous seront d'une grande utilité dans la suite. Donnons-en immédiatement une application.

Connaissant deux des angles d'un triangle quelconque, trouver la valeur du troisième angle.

56. Voici un triangle ABC (fig. 75). Je sais que l'angle A = 75° et que l'angle B = 63°. On demande la valeur de l'angle C.

Par le sommet A, je mène une parallèle au côté opposé BC et je remarque immédiatement que l'angle B = angle 1 comme alterne-interne, de même C = 2 pour la même raison. L'angle A n'a pas bougé ; mais je sais que 1 + A + 2 = 180° puisqu'ils sont formés du même côté d'une droite autour d'un point (n° 10). *J'en conclus que la somme des angles d'un triangle égale toujours 180° ou 2 droits.*

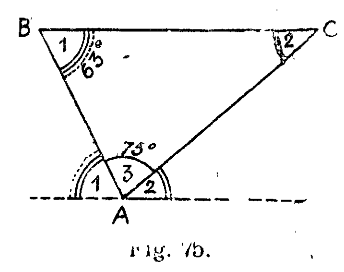


Fig. 75.

Dans le cas présent, je sais aussi que :

$$1 + A = 63° + 75° = 138°.$$

Il suffira donc de soustraire 138° de 180° pour avoir la valeur commune de l'angle 2 et de l'angle C.

$$180° - 138° = 42°$$

Ainsi C = 42°.

57. Dans les *triangles rectangles*, comme l'angle droit a nécessairement 90° il s'ensuit que *les 2 angles aigus* qui restent *sont toujours complémentaires*. Leur somme est toujours égale à 90°.

Exemple : *Si un triangle rectangle possède un angle aigu de 30°, quelle est la valeur de l'autre angle?*

Sa valeur sera de

$$90^\circ - 30 = 60^\circ.$$

En effet :

$$90^\circ + 30^\circ + 60^\circ = 180^\circ.$$

58. *Deuxième conclusion* : Un triangle rectangle ne peut posséder un angle obtus, c'est-à-dire plus grand que 90° ; car si vous enlevez l'angle droit qui occupe déjà 90°, il ne reste plus pour la somme des deux autres que 90°.

EXERCICES ET APPLICATIONS

59. *Par un point donné P (fig. 76), mener une route droite également distante de deux villages A et B.*

Je joins A et B par une droite ; j'en prends le milieu M. La droite PM sera le tracé de la route. Prouvons-le : la distance de A et de B à la route, est représentée par la perpendiculaire abaissée de A sur PM, et de B sur la même droite (n° 41). Ce qui me donne AD et BC ; or, AD = BC. En effet, les deux triangles formés sont

rectangles en D et en C; ils ont l'hypothénuse égale par construction (MA = MB) puisque M est le milieu

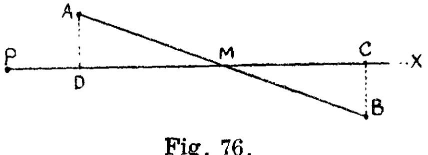


Fig. 76.

de AB; enfin, ils ont les angles en M égaux comme opposés par le sommet; donc ils sont égaux (n° 49); donc AD = CB.

Problème du billard.

60. *Etant donnée sur un billard la position de 2 billes A et B (fig. 77), trouver le point de la bande où l'une d'elles doit frapper pour rencontrer l'autre dans sa réflexion.*

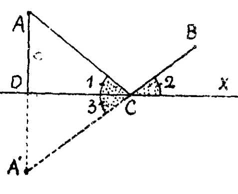


Fig. 77.

Solution : Il faut d'abord savoir que lorsqu'une bille touche une bande, l'angle sous lequel elle est renvoyée égale son angle d'arrivée. Si elle touche la bande DX à l'arrivée en faisant avec elle un angle de 20°, elle sera renvoyée dans une direction qui fera encore 20°.

Cherchons le point symétrique de A, soit A' obtenu par rabattement, ou en prolongeant la perpendicu-

laire AO d'une même quantité OA' au delà de la bande; jiognons BA', puis CA ; les angles 1 et 2 sont égaux et c'est précisément ce que nous désirions.

Je dis que $1 = 2$; en effet $1 = 3$, comme opposés par le sommet; de même $3 = 1$ à cause du rabattement et de la symétrie.

Ce problème s'applique aussi à la marche d'un rayon lumineux. Un spectateur situé en A et regardant un miroir DC, verrait l'image d'une lampe électrique située en B, dans la direction AC.

61. Enfin le même problème résout une autre question qu'on pourrait formuler ainsi : *Quel est le plus court chemin pour aller de A en B, en touchant la droite DX?* C'est encore ACB. Démontrons-le.

Prenons un autre point E sur DX (fig. 78). Je dis qu'on aura nécessairement :

chemin $AE + EB > AC + CB$

(> signifie *plus grand que*).

Fig. 78

En effet, si nous rabattons nous voyons que AE + EB ou si vous voulez, que si nous allons de A en B en passant par E, c'est comme si nous allions de A' à B en passant par E. Mais cela nous éloigne de la ligne droite A'CB qui est le plus court chemin, et nous savons que ce plus court chemin

est de longueur égale à celui qui va de A en B en passant par C.

Donc AE + EB est plus grand que AC + CB.

62. *Quel angle font entre elles les deux bissectrices de deux angles adjacents supplémentaires ?*

Réponse : Soient les angles 1 et 2 qui sont supplémentaires : leur somme vaut 180° ou deux angles droits (fig. 79) ; chaque bissectrice les divise en deux parties égales, donc la moitié de 1 plus la moitié de 2 doit égaler 90° ou un droit. Les bissectrices sont donc perpendiculaires l'une sur l'autre.

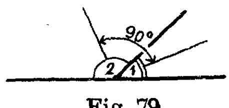


Fig. 79.

63. *A un arc double, correspond-il une corde double ?*

Réponse : Assurément non ; vous pouvez vous en rendre compte sur la figure 80. L'angle 1 a pour corde *a* ; si je double cet angle, j'aurai une corde *b* évidemment plus longue ; mais elle ne sera pas 2 fois plus longue que *a*. Je puis le démontrer en considérant la seconde corde de l'angle 2 qui égale celle de l'angle 1 dont elle est la symétrique. En effet, dans le triangle ABC, *b* est plus

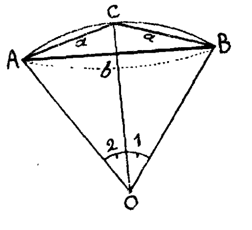


Fig. 80.

petit que $a + a$ ou $2a$, puisque b est le plus court chemin de A à B.

64. *Les angles à la base d'un triangle valent respectivement 71° et 47° ; quelle est la valeur de celui du sommet?*

Nous savons que la somme des trois angles égale deux droits ou 180°. nous allons donc additionner les 2 angles à la base : $71° + 47° = 118°$.

Retranchons 118° de 180°. nous aurons le 3e angle.

3e angle $= 180° - 118° = 62°$.

65. *L'un des angles aigus d'un triangle rectangle vaut 54° 28', combien vaut l'autre angle aigu ?*

Nous savons que les 2 angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires, c'est-à-dire que leur somme égale un angle droit ou 90° (nº 57). L'angle aigu cherché vaudra donc $90° - 54° 28' = 35° 32'$.

66. *Si l'on prolonge un côté d'un triangle, quelle est la valeur de l'angle extérieur ?* (fig. 81).

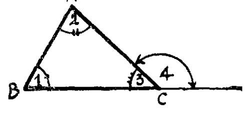


Fig. 81.

Soit le triangle ABC, je prolonge BC, l'angle extérieur sera 4, et $3 + 4 = 180°$, mais on sait aussi que $1 + 2 + 3 = 180°$;

donc : angles $3 + 4 =$ angles $1 + 2 + 3$

ou, en enlevant 3 aux deux membres de l'équation

angle $4 =$ angles $1 + 2$.

Ainsi l'angle extérieur vaut la somme des deux angles auquel il n'est pas adjacent.

67. *Dans un triangle isocèle l'angle au sommet vaut 38° ; que valent ceux de la base ?*

La somme des deux angles à la base est supplémentaire de l'angle au sommet ; cette somme est donc égale à $180° - 38° = 142°$. Nous savons d'autre part que dans un triangle isocèle, les angles à la base sont égaux ; chacun d'eux vaudra donc $\frac{142°}{2} = 71°$.

68. *Quelle particularité présente un triangle rectangle quand un de ses angles aigus vaut 45° ?*

Le deuxième angle aigu, comme complément du premier, vaut évidemment 45°, lui aussi ; donc le triangle est isocèle.

69. Démontrer que les bissectrices des 3 angles d'un triangle se rencontrent en un même point.

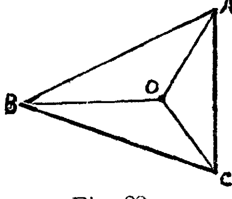


Fig. 82.

Soit le triangle ABC (fig. 82), je mène les bissectrices de A et de B, jusqu'à leur intersection O. Ce point est à égale distance de AB et de AC, en raison de la bissectrice AO (n° 51) ; mais il est aussi à la même distance de AB et de BC en raison de la bis-

sectrice BO. Puisqu'il est à la même distance de BC et de AC, d'après ce que nous venons de voir, il est nécessairement sur la bissectrice de l'angle C dont BC et AC sont les côtés. Donc la bissectrice de C passera par O.

70. *Trouver l'angle que forment entre elles deux droites non parallèles, mais qu'on ne peut prolonger.*

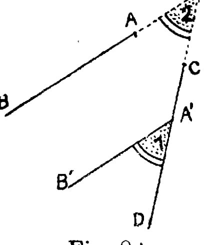


Fig. 83.

Soient les droites AB, CD, (fig. 83). Il suffira de mener une parallèle à AB, soit A'B' qui coupe CD ; l'angle 1 égale l'angle 2 qu'on obtiendrait si on pouvait prolonger les droites données. En effet 1 = 2 comme correspondants.

71. Démontrer que dans tout triangle, au plus grand angle est opposé le plus grand côté.

Soit le triangle ABC (fig. 84) dont les côtés seront a, b, c. Je veux démontrer que si : l'angle B est plus grand que l'angle C le côté b sera plus grand que le côté c.

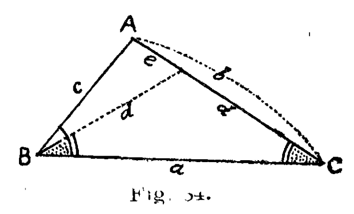


Fig. 84.

Je commence par construire en B un angle égal à C.

J'ai dès lors un triangle isocèle de base a et dont j'appellerai les côtés d, donc le côté b vaudra $d + e$.

Ainsi $b = d + e$ et comme je veux prouver que b est plus grand que c, j'arriverai au même résultat en prouvant que $(d + e)$ ou b est plus grand que c.

Pour cela je n'ai qu'à considérer le triangle $c\ d\ e$ où je vois clairement que la somme des côtés $d + e$ est plus grande que le troisième côté c qui est une ligne droite.

72. *Si dans un triangle rectangle on abaisse une perpendiculaire du sommet de l'angle droit sur l'hypothénuse, comment cet angle droit est-il divisé ?*

En deux autres angles respectivement égaux aux angles aigus du grand triangle rectangle. En effet, soit ABC, un triangle rectangle (fig. 85) et AD la perpendiculaire abaissée

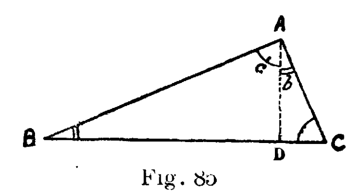


Fig. 85

de A sur l'hypothénuse, qui divise A en deux angles b et c et le triangle ABC en deux autres triangles rectangles.

Il est évident que $B = b$ comme compléments respectifs de C, et que $C = c$ comme compléments respectifs de B.

TROISIÈME LEÇON

PREMIÈRE ÉTUDE DES SURFACES

Nous allons maintenant aborder des questions d'un ordre entièrement nouveau : l'évaluation des surfaces. Nous commencerons par des surfaces limitées de toutes parts au moyen de lignes droites, ce que nous avons appelé des *polygones*. Mais là encore, il faut avancer pas à pas, aller du simple au composé.

73. Il semblerait donc, de prime abord, que nous devions commencer par l'étude des polygones à 3 côtés, les triangles; cependant il est plus facile de débuter

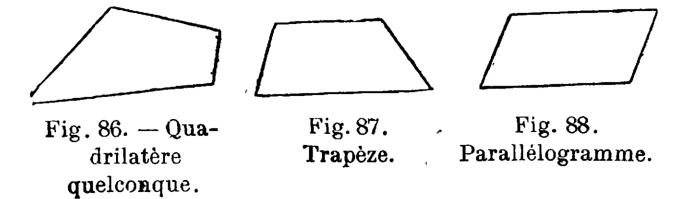


Fig. 86. — Quadrilatère quelconque. Fig. 87. Trapèze. Fig. 88. Parallélogramme.

par celle des quadrilatères (à 4 côtés). Ces polygones sont de plusieurs sortes qu'il faut connaître.

Ou bien ils sont irréguliers et leurs côtés sont quel-

conques (fig. 86); ou bien 2 de leurs côtés sont parallèles entre eux (fig. 87) : on les nomme *trapèzes;* ou bien enfin leurs côtés sont parallèles deux à deux : ce sont des *parallélogrammes* (fig. 88).

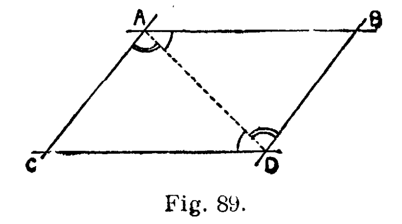


Fig. 89.

Ce sont ces derniers qui vont d'abord retenir notre attention.

Traçons deux parallèles AB, CD; coupons-les par deux autres parallèles ; nous avons un *parallélogramme* (fig. 89).

Les propriétés de ces quadrilatères sont très importantes. Examinons-en quelques-unes.

74. *Les portions de parallèles comprises entre parallèles sont égales deux à deux;* ce qui revient à dire que *dans tout parallélogramme, les côtés opposés sont égaux.*

Il suffit pour le démontrer de tirer la droite AD qui prend le nom de *diagonale* (une droite CB serait aussi une diagonale). Montrons que les triangles ainsi formés ABD et ACD sont égaux.

AD est un côté commun aux deux triangles ;

Angle 1 = 2 comme alternes-internes;

Angle 3 = 4 pour la même raison.

Ainsi, nos triangles ont un côté commun, et deux

angles adjacents à ce côté qui sont respectivement égaux. Ils sont donc égaux (d'après le 1er cas d'égalité des triangles nº 25). Vous pouvez vous en assurer en les découpant.

Nous obtiendrions un résultat analogue avec la 2e diagonale CB.

75. Redessinons la figure avec les deux diagonales cette fois. Nous allons constater que *ces deux diagonales se coupent en leur milieu :* En d'autres termes, le point M est milieu de chaque diagonale (fig. 90).

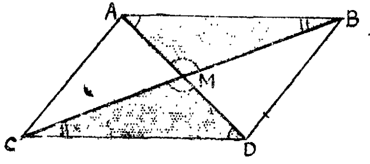


Fig. 90.

En effet les triangles ombrés sont égaux : AB = CD (parallèles comprises entre parallèles). Les angles adjacents à AB et à CD sont égaux deux à deux comme alternes internes. Nous retombons encore dans le premier cas d'égalité. Donc CM = MB et AM = MD.

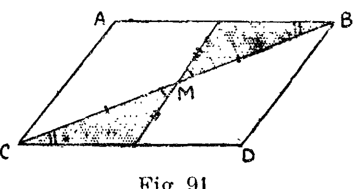


Fig. 91.

76. Bien mieux, une droite quelconque menée par M serait aussi divisée par la moitié, si l'on considère la portion comprise entre les

parallèles, ce qui prouve que *le point de rencontre M des diagonales est un centre de symétrie.* Vous le démontrerez facilement en considérant l'égalité des triangles ombrés (fig. 91).

MB = MC (nº précédent).

Les angles en M sont égaux comme opposés par le sommet ; les angles en B et C sont égaux comme alternes internes.

Donc ME = MF.

77. Maintenant construisons ABCD avec des tiges articulées, et déformons ce quadrilatère, nous aurons toujours des parallélogrammes, mais les angles à la base prendront toutes les valeurs possibles de 0 à 90°.

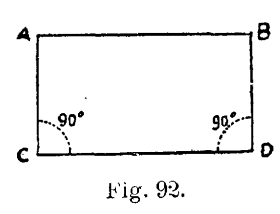


Fig. 92.

Lorsque nous atteindrons 90°, c'est-à-dire l'angle droit, nous aurons des côtés perpendiculaires les uns

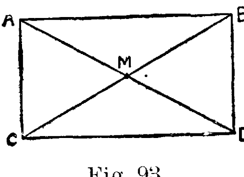


Fig. 93.

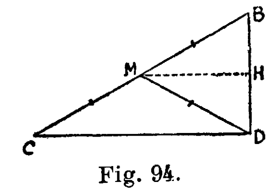


Fig. 94.

aux autres (fig. 92). Un quadrilatère ainsi construit est un *rectangle*; c'est en somme un quadrilatère

dont tous les angles sont droits. M est encore le point milieu des diagonales, mais ici, les diagonales (fig. 93), déterminent des triangles rectangles égaux et les diagonales sont aussi égales entre elles. Donc MD = MC = MB dans la figure 94.

78. Nous allons en déduire des conséquences intéressantes : *Dans un triangle rectangle, la médiane* (MD) *issue de l'angle droit* (D) *est égale à la moitié de l'hypothénuse* (CB) *; elle détermine aussi deux triangles isocèles* (CMD et DMB) : *enfin le point M est le centre d une circonférence qui passe par les trois sommets* et ceci est très important, ainsi que nous le verrons plus tard.

79. Mais nous n'avons pas épuisé les déductions : puisque DMB est isocèle, si nous plions ce triangle en deux suivant MH, le côté MB étant symétrique de MD, MH est la hauteur par rapport à la base BD : donc MH, perpendiculaire à la base, est *parallèle* à CD qui lui est aussi perpendiculaire ; d'où cette conclusion : *dans un triangle rectangle toute parallèle à un côté menée par le milieu de l'hypothénuse divise le côté opposé en deux parties égales* (puisque A est le milieu de BD).

80. Or ce théorème est vrai pour tous les triangles, rectangles ou non. Reprenons la figure précédente, et

à ce triangle rectangle adossons-en un autre (fig. 95) de manière que BD soit commun aux deux. H étant le milieu de BD, il est bien évident que si je prolonge MH, cette parallèle à CD (ou à CE) tombera sur le *milieu* de BE en M′, d'après ce que nous venons de démontrer. La conclusion s'impose : *dans un triangle quelconque* BCE, *toute parallèle* (MM′) *à la base* (CE) *et menée par le milieu d'un côté tombe sur le milieu du côté opposé.*

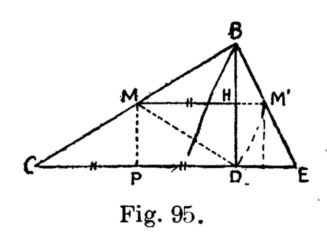


Fig. 95.

81. Maintenant, abaissons MP perpendiculaire à CD ; MH = PD (parallèles comprises entre parallèles) mais PD égale aussi CP, puisque CMD est isocèle (nº 14). Donc MH égalant PD et CP vaut évidemment la moitié de CD.

Je puis en dire autant de HM′ qui doit égaler la moitié de DE. Ainsi *toute la parallèle* MM′ *égale la moitié de toute la base* CE.

82. Voici immédiatement une application de ces théorèmes (V. fig. 96). Je construis un trapèze ABCD que je divise en deux triangles par une diagonale. Si je mène par le milieu de AC une parallèle à la base CD

du premier triangle de gauche. Je sais que cette parallèle tombera sur le milieu du côté opposé AD ; et elle vaudra la moitié de la base CD.

J'aurai donc $PM = \frac{CD}{2}$

Mais si je prolonge PM à travers le triangle de droite, la base de celui-ci étant AB, j'obtiendrai MM′ parallèle à AB et égale à sa moitié et j'écrirai :

$$MM' = \frac{AB}{2}$$

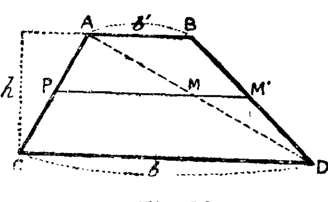


Fig. 96.

Donc la somme des deux tronçons de PM′ (c'est-à-dire PM + MM′ égale *la moitié* de la grande base *plus la moitié* de la petite base.

On peut obtenir ce résultat algébriquement sans aucune difficulté. Nous savons maintenant que

$$PM = \frac{CD}{2} \qquad \text{et } MM' = \frac{AB}{2}.$$

Appelons b la grande base CD et b' la petite base AB.

J'aurai $PM = \frac{b}{2}$ et $MM' = \frac{b'}{2}$;

additionnons membre à membre, nous aurons

$$PM + MM' = \frac{b}{2} + \frac{b'}{2}$$

ou, ce qui revient au même :

$$PM' = \frac{b + b'}{2}.$$

Ce qui indique bien que *dans un trapèze si l'on mène une parallèle aux bases par le milieu d'un des côtés, cette parallèle vaut la demi-somme des bases* (ou la *moyenne* arithmétique des deux bases).

Si l'on avait :

grande base = 30 mm. (comme sur la figure) ;

petite base = 22 mm.

on en déduirait que

$$PM' = \frac{30 + 22}{2} = 26 \text{ mm.}$$

Comment on évalue les surfaces.

83. Supposons qu'on vous donne à évaluer une surface, celle d'un parallélogramme par exemple, quelle méthode prendrez-vous ? Il est évident que vous serez obligés de choisir une *grandeur de surface* prise pour *unité* et que vous chercherez ensuite combien votre parallélogramme contient de fois la *surface unité*. Le nombre trouvé vous donnera ce que les géomètres appellent l'*aire* du parallélogramme.

Ainsi la *surface*, c'est l'étendue elle-même, l'*aire* est l'évaluation de cette étendue.

Dans le langage courant, on confond sans inconvénient aire et surface : nous emploierons donc les deux mots indifféremment, mais il sera toujours sous-entendu que lorsque nous parlerons de la surface d'une figure, nous désignerons son évaluation, c'est-à-dire l'aire de la figure.

Depuis longtemps les anciens avaient adopté comme unité de surface, le *carré* construit avec l'unité de longueur. Pour les relations géométriques, le choix de l'unité de longueur importe peu : les propositions que nous démontrerons s'accommoderaient tout aussi bien des anciennes mesures : on peut donc évaluer une surface en pouces carrés, en pieds carrés, en coudées carrées, en mètres carrés, etc... De même, la grandeur du carré ne change rien aux méthodes d'évaluation : cette grandeur est liée à l'unité linéaire de longueur.

Surface du rectangle.

84. Voici un rectangle : adoptons le mètre comme unité linéaire ; avec notre mètre nous construirons un carré de un mètre de côté et ce carré deviendra notre surface unité (v. fig. 97).

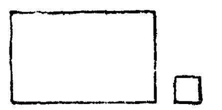


Fig. 97. — Rectangle avec un petit carré pris pour surface unité.

Trouver combien le rectangle contient de fois le petit carré, c'est évaluer la surface du rectangle.

A cet effet je porte sur la longueur du rectangle de la figure 98 l'unité linéaire bout à bout, en d'autres termes, je mesure sa *longueur* : supposons qu'elle ait 9 mètres ; la hauteur (ou largeur) en contient 6. Par les points de division traçons des

parallèles dans chaque sens. Mon rectangle est évidemment divisé en carrés unités tous égaux entre eux : chacun de ces carrés est en effet superposable aux autres, ce qu'on démontre facilement.

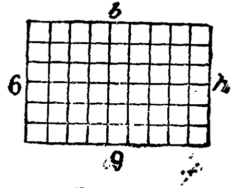


Fig. 98.

Il s'ensuit que le rectangle est formé d'un nombre de carrés-unités égal à celui qu'on obtient en multipliant le nombre de mètres linéaires contenus dans la longueur par le nombre de mètres linéaires contenus dans la hauteur ou largeur.

Ici nous aurons : $6 \times 9 = 54$.

Il y a donc 54 carrés unités-surface ; nous dirons que le rectangle vaut **54** mètres carrés, puisque le mètre est choisi comme unité linéaire.

Au cas où le nombre de mètres ne serait pas exact, rien ne nous empêche de prendre des unités aussi petites qu'il sera nécessaire ; on peut même prendre des fractions non décimales, le résultat sera toujours obtenu *avec l'approximation désirée*.

Ainsi, ***pour évaluer la surface d'un rectangle, il suffit de multiplier sa longueur par sa largeur (ou hauteur).***

Formule : Si b représente la base ou longueur, h la hauteur, S la surface, nous dirons

Surface = base × hauteur

ou

$$S = b \times h$$

Ici S est l'inconnue ; mais ce pourra être b ou h. Dans ce cas, que nous avons déjà examiné en Arithmétique, nous pouvons avec fruit recourir à l'Algèbre et nous aurons :

$$b = \frac{S}{h} \quad \text{et } h = \frac{S}{b}.$$

Si donc, la surface est donnée en même temps que l'une des dimensions, il suffira de diviser cette surface par la dimension connue pour avoir immédiatement l'autre dimension.

Surface du carré.

85. Le carré n'est qu'une variété de rectangle où la longueur égale la largeur, ou bien qui a même base et même hauteur, mots que nous emploierons désormais. La règle reste donc la même ; on cherchera combien le grand carré contient de petits carrés unités-surface, et l'on aura encore

Surface = base × hauteur

ou Surface = base × base

ou Surface = côté × côté

puisque la dimension prend le nom de *côté*.

Appelons c le côté, nous aurons, S étant la surface :

$$S = c \times c = c^2.$$

Cette expression c^2, que nous lisons *c au carré*, provient précisément de ce fait que c^2 exprime l'aire du carré construit avec c comme côté.

Surface du parallélogramme.

86. Soit maintenant à évaluer la surface d'un parallélogramme ABCD (fig. 99). Nous conviendrons tout d'abord d'appeler *hauteur* du parallélogramme la distance entre les côtés parallèles dont l'un servira de base. Cela revient d'ailleurs à abaisser une perpendiculaire commune entre ces deux côtés. Ainsi h qui part de AB pour tomber perpendiculairement sur la base est la hauteur.

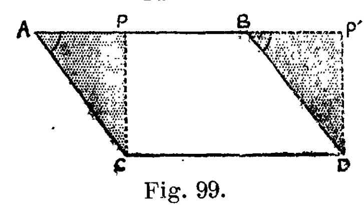


Fig. 99.

Découpons le triangle rectangle ACP ; si nous le portons sur la droite (AC étant appuyé sur BD), nous aurons un rectangle parfait.

Les triangles ombrés rectangles sont en effet égaux : hypothénuses égales : AC = BD côtés d'un parallélogramme et angle aigu égal : A = B comme correspondants.

Le rectangle PP′CD équivaut donc au parallélogramme primitif, et comme ils ont même base et même hauteur, les surfaces étant équivalentes, auront donc même expression et nous pourrons écrire :

$$S = b \times h$$

87. Autre conclusion : En C et D fixons sur une planchette deux clous auxquels nous attacherons deux

élastiques AC et BD que nous réunirons aux extrémités d'une règle AB égale à la base (fig. 100). Nous aurons un parallélogramme déformable. Il suffira alors de faire glisser AB sur une parallèle à la base CD, pour obtenir un parallélogramme ayant toujours même base et même hauteur *h*, qui mesurera l'écartement des parallèles. Eh bien, aussi loin que vous

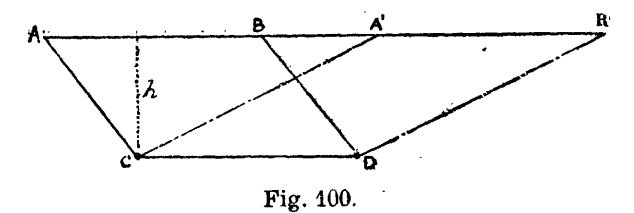


Fig. 100.

portiez AB sur la droite AX, vous aurez des parallélogrammes équivalents, c'est-à-dire dont les aires seront égales entre elles. Ainsi parallélogramme A'B'CD = parallélogramme ABCD, puisqu'ils ont même base et même hauteur.

En allant encore vers la droite, nous verrions notre parallélogramme s'amincir de plus en plus et les côtés A'C et B'D se rapprocheraient, mais ils ne pourraient *jamais* se toucher, puisque la parallèle du haut AX ne rencontrera *jamais* celle du bas CD.

Quelques géomètres disent que les parallèles se rencontrent à l'*infini*; dans ce cas on pourrait dire aussi que les côtés se toucheraient si on portait A'B' à

l'*infini*. Mais il faut en Géométrie manier ce mot *infini* avec beaucoup de circonspection ; il nous suffira pour l'instant de savoir qu'ici, comme en beaucoup de cas, l'*infini* est synonyme de *jamais*.

Surface du triangle.

88. Voulez-vous maintenant trouver la surface du triangle, la proposition précédente va nous fournir la solution de ce nouveau problème.

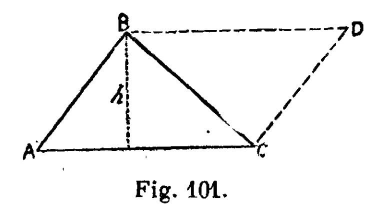


Fig. 101.

Soit à évaluer la surface du triangle ABC dont la hauteur est h (fig. 101).

Je mène CD parallèle à AB et BD parallèle à la base b. J'ai obtenu un parallélogramme dont BC est la diagonale. Donc triangle BCD = triangle ABC ou ce qui revient au même :

Triangle ABC = la moitié du parallélogramme ABDC (v. n° 74).

Mais, surface du parallélogramme = base × hauteur ; donc la surface du triangle en vaudra la moitié ou

Surface du triangle = 1/2 (base × hauteur)

ou

$$S = 1/2\,(b \times h)$$

ou

$$S = \frac{b \times h}{2}.$$

Donc la surface du triangle s'obtient en prenant la moitié du produit de la base par la hauteur.

On transforme parfois

$$S = \frac{b \times h}{2} \quad \text{en } S = b + \frac{h}{2},$$

ce qui s'énonce ainsi ; *la surface du triangle s'obtient en multipliant la base par la moitié de la hauteur*, ce qui revient finalement à l'expression précédente. On peut prouver cette dernière formule ;

$$S = b \times \frac{h}{2}$$

au moyen d'une construction géométrique (v. fig. 102). Par le milieu M de AB, menons une parallèle à la base ; la hauteur h est divisée en deux moitiés ; prolongeons cette parallèle à droite et à gauche jusqu'à la rencontre des perpendiculaires AA′ et CC′. Coupons avec des ciseaux, le haut du triangle, d'abord suivant la parallèle puis suivant la hauteur. Les triangles ombrés obtenus viennent occuper la place des triangles ombrés de droite et de gauche.

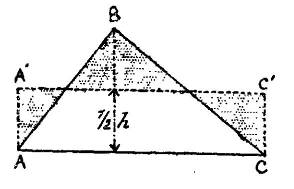


Fig. 102.

On voit dès lors que notre triangle primitif ABC est bien l'équivalent du rectangle ainsi composé (A′C′ AC) qui a même base et *la moitié* seulement de la hauteur du triangle ABC.

89. Maintenant fixons sur une planchette deux clous qui marqueront la base AC d'un triangle (fig. 103). En A et en C attachons deux élastiques que nous joindrons à un point B (sommet du triangle).

Si nous faisons glisser le point B sur une parallèle à la base, nous obtiendrons des triangles de plus en

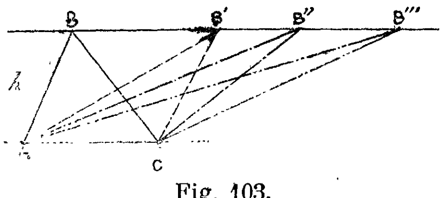


Fig. 103.

plus allongés. Et bien, ces triangles ont des surfaces équivalentes.

Pourquoi? Tout simplement parce qu'ils ont même base et même hauteur (distance entre les parallèles). Nous dirons donc que la parallèle BB''' est le lieu géométrique des sommets de triangles équivalents.

Surface du losange.

90. Le losange est un parallélogramme dont les quatre côtés sont égaux. Ne le confondez pas avec le carré qui, lui aussi, a ses quatre côtés égaux, mais dont les angles sont droits. Le carré est une variété de parallélogramme rectangle, tandis que le losange a des angles quelconques ; on pourrait l'obtenir en

déformant un carré, les diagonales se couperont toujours à angle droit (v. fig. 104).

Pour le losange, le meilleur moyen d'obtenir *sa surface est de faire le produit de ses diagonales et d'en prendre la moitié.*

En effet, construisons un rectangle en menant par les sommets ABCD des parallèles aux diagonales. La surface de ce rectangle ainsi obtenue sera égale au produit de la base par la hauteur, ou ce qui revient au même au produit des diagonales AD et BC puisqu'en raison des parallèles, BC = base et AD = hauteur.

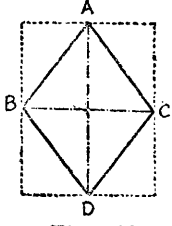


Fig. 104.

Mais nous voyons immédiatement que les 4 triangles extérieurs sont égaux aux 4 triangles intérieurs. Nous avons ainsi doublé le losange.

La surface de ce dernier vaudra donc bien la moitié de la surface du rectangle construit.

91. Surface du trapèze.

Quant au trapèze, il suffit pour évaluer sa surface, de décomposer la figure en deux triangles, comme nous l'avons déjà fait.

La surface du trapèze ABCD égale la surface du triangle 1 + la surface du triangle 2.

Et ces deux triangles ont même hauteur *h*, qui

mesure l'écartement des parallèles, c'est-à-dire des bases b et b' ; b étant la grande base du trapèze et b' la petite base.

Nous pourrons donc écrire :

$$S = \text{Surface de 1} + \text{Surface de 2}$$

Mais

$$\text{Surf. de } 1 = \frac{bh}{2}$$

$$\text{Surf. de } 2 = \frac{b'h}{2}$$

Additionnons :

$$\text{Surf. de } 1 + 2 = \frac{bh}{2} + \frac{b'h}{2}$$

ou

$$\text{Surf. de } 1 + 2 = \frac{(b + b')\,h}{2}$$

h étant mis en facteur commun (v. *Algèbre*, p. 56). La dernière expression peut être mise sous cette forme :

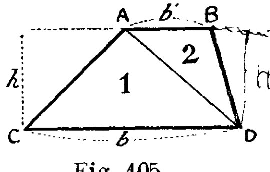


Fig. 105.

$$\text{Surf. de } 1 + 2 = \left(\frac{b + b'}{2}\right) h$$

ce qui se traduira ainsi :

La surface du trapèze égale la demi-somme des bases multipliée par la hauteur.

Ou égale le *produit de la moyenne des deux bases par la hauteur.*

92. La Géométrie peut le prouver directement. Soit le trapèze ABCD (fig. 106). Par le milieu M du côté BD, menons une parallèle à AC, soit EF cette parallèle ; les deux triangles ombrés sont égaux : BM = MD par construction ; angles en M opposés par le sommet ; angle B = D (alternes-internes).

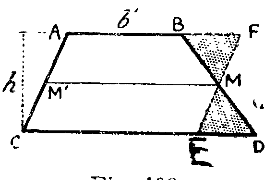


Fig. 106.

Nous pourrons donc enlever le triangle ombré du bas et le mettre à la place de celui du haut, nous avons dès lors un parallélogramme AFCE équivalant au trapèze primitif. Ils ont même hauteur h, distance entre les bases.

Donc : surface du parallélogramme AFCE = CE $\times$ h.

D'autre part, nous avons vu (nº 82) que MM' parallèle menée par le milieu M d'un côté est une moyenne entre les deux bases et cette moyenne est précisément égale à CE.

L'expression $$\text{AFCE} = \text{CE} \times h$$
peut donc être remplacée par la suivante
$$\text{AFCE} = \text{MM}' \times h$$
puisque MM' = CE. Nous aboutissons donc au même résultat que précédemment.

93. On obtiendrait une solution aussi élégante en transformant le trapèze en un triangle équivalent.

Menons AME par le point M milieu de BD (fig. 107). Le triangle ombré du haut, découpé, peut prendre la place de celui du bas, car ils sont égaux : BM = MD ; les angles en M sont égaux comme opposés par le sommet ; B = D comme alternes-internes.

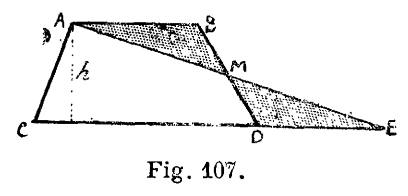


Fig. 107.

Donc, triangle ADE = trapèze ABCD

Mais surface du triangle ACE $= \dfrac{\mathrm{CE} \times h}{2}$.

Evaluons CE. Cette base, ainsi qu'on peut le voir dans la figure, est formée de $b + b'$; on aura donc :

$$\text{Surf. ACE} = \frac{(b + b')\, h}{2} \text{ ou } \left(\frac{b + b'}{2}\right) h$$

Ainsi, l'expression finale indique bien le produit de la hauteur par une moyenne entre les deux bases $\left(\dfrac{b + b'}{2}\right)$ résultat déjà obtenu par les autres méthodes.

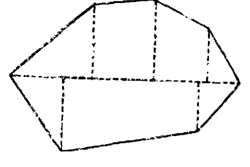
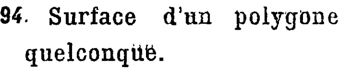


Fig. 108.



94. Surface d'un polygone quelconque.

Si l'on a affaire à un polygone quelconque, on pourra toujours le décomposer en triangles et en trapèzes partiels, ainsi que l'indique l'exemple de la figure 108. On mènera une diago-

nale, on y abaissera des perpendiculaires de chaque sommet et on additionnera toutes les surfaces partielles.

Géométrie et Algèbre

Nous avons appris maintenant assez de géométrie pour comprendre le principe des méthodes qui nous permettent de représenter les opérations arithmétiques sur les nombres, ou mieux sur les grandeurs et quantités envisagées en Algèbre, par des figures géométriques. Ces méthodes sont dues dans leurs principes aux recherches de Pythagore qui vivait au VI[e] siècle av. J.-C., mais il a fallu attendre bien longtemps pour les généraliser et en déduire toute une série d'applications qui ont donné naissance à une branche distincte dans les sciences mathématiques et connue aujourd'hui sous le nom de Géométrie analytique. Vous pensez bien que mon ambition n'ira pas jusqu'à prétendre vous initier aux arcanes de l'Analyse qui ramène les questions les plus complexes de la géométrie à des problèmes algébriques, mais d'autre part il serait fâcheux de passer sous silence certaines relations simples faciles à exposer et à comprendre.

95. Une droite représentera une grandeur (ou un nombre) si nous la divisons en tronçons égaux à l'unité arbitrairement choisie.

Soient les droites a et b (fig. 109) qui contiennent l'une 8 divisions unités, l'autre 3 divisions ; il est

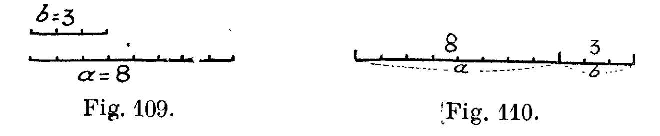


Fig. 109. Fig. 110.

clair que si nous les mettons bout à bout, nous aurons réalisé une addition qui sera représentée par une droite comprenant 8 + 3 = 11 unités (fig. 110).

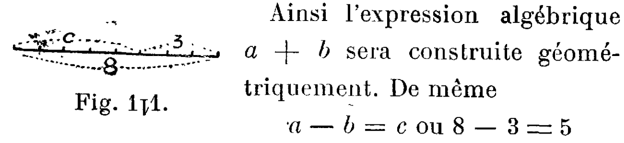


Fig. 111.

Ainsi l'expression algébrique $a + b$ sera construite géométriquement. De même

$$a - b = c \text{ ou } 8 - 3 = 5$$

sera donné par la droite a dont nous avons retranché b et c représentera la différence $a - b$ (fig. 111).

96. S'agit-il d'opérer une division par 2, nous aurons recours à une figure déjà employée. Construisons un angle dont nous limiterons l'un des côtés en B (fig. 112). Par le milieu M de AB menons une parallèle au 2e côté AX indéfini. Soit maintenant à diviser a une grandeur quelconque représentée par une droite en 2 parties égales. Du point B comme centre, je décrirai un arc de circonférence ayant comme rayon a qui coupera AX, soit c l'intersection : BC = a, mais je sais (no 80) que M′ divise BC ou a en deux parties égales Il me suf-

fira donc de mesurer BM′ ou M′C pour avoir la moitié de la grandeur donnée *a*.

Si l'on se sert d'une même échelle, dont les graduations représenteront l'unité, la simple lecture donnera le quotient cherché. On construit généralement ces figures à l'échelle de 1 centimètre ou de 1 millimètre pour 1 unité suivant la feuille dont on dispose et l'approximation à obtenir ; avec des centimètres unités on obtient toujours des millimètres, donc les premières décimales exactes.

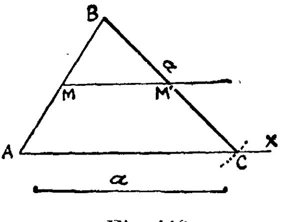


Fig. 112.

On aurait plus vite fait, penserez-vous avec raison, de diviser le nombre donné par 2. Evidemment, lorsqu'on n'a qu'*une* division à effectuer. Mais supposez un dessinatenr astreint à

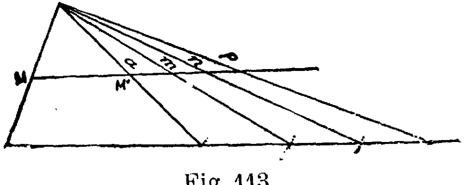


Fig. 113.

réduire un dessin de moitié ; autant de droites à réduire, autant de divisions à faire ; l'exercice devient un jeu si, à l'aide d'un compas, il reporte sur la

figure précédente toutes les longueurs à réduire. Ce que nous avons fait pour une grandeur a, il peut le réaliser pour des grandeurs m, n, p. Toutes ces droites partiront de B et couperont AX ; l'intersection de MM' avec ces mêmes droites lui donnera immédiatement le résultat de la division par 2 (fig. 113). Ainsi une règle, un compas et un double décimètre lui éviteront de longs calculs.

A plus forte raison, la méthode serait-elle plus appréciée si au lieu de diviser par 2, notre dessinateur était dans l'obligation de réduire son dessin au cinquième ou au neuvième. Or la géométrie nous enseignera, lorsque nous étudierons les lignes proportionnelles, un procédé analogue applicable dans tous les cas.

97. La multiplication représentée en Géométrie.

Puisque la surface d'un rectangle dont les dimensions sont a et b s'obtient en multipliant a par b, il est évident que la formule

$$S = a\,b$$

3 S=18 6

Fig. 114.

peut nous servir à représenter le produit de deux facteurs. Ainsi, lorsque je vous donne deux grandeurs $a = 6$ et $b = 3$, si nous construisons un rectangle ayant 6 et 3 pour côté, sa surface exprimera le produit de 6 par 3 ou de a par b (fig. 114).

En effet

$$6 \times 3 = 18.$$

ou $$a \times b = S$$

Donc, géométriquement, *un produit de deux facteurs représente une surface.*

98. Pour une raison analogue — et c'est ce que nous avons déjà vu (n° 85) — le carré d'un nombre $a = 3$ sera représenté géométriquement par un carré ayant ce nombre $a = 3$ pour côté, puisque la surface du carré est égale au nombre (exprimant le côté) multiplié par lui-même :

$$S = a^2 = 3 \times 3 = 3^2 = 9.$$

L'application du procédé permet même des démonstrations algébriques assez compliquées.

Nous avons vu en Algèbre (n° 120) que le *carré de la somme de deux quantités est égal au carré de la première, plus le carré de la seconde, plus le double produit de la première par la seconde ;* et nous l'avons prouvé par une multiplication algébrique. Or, on se rend bien plus facilement compte du mécanisme de démonstration au moyen de la Géométrie.

$b=2$
$a=3$

Fig. 115.

a a^2
a

Fig. 116.

Soit à élever au carré la somme des deux quantités a et b. Pour la compréhension, soient $a = 3$ et $b = 2$;

ces grandeurs seront représentées par les droites a et b (fig. 115).

Le carré de a sera représenté par un carré ayant 3 de côté, ou a, dont la surface est a^2 (fig. 116) ; maintenant construisons le carré de $a + b$. Il suffit de mettre d'abord b au bout de a, le résultat sera bien $a + b$; puis de dessiner un carré ayant comme côté $(a + b)$ (fig. 117).

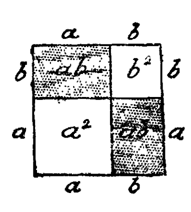


Fig. 117.

Examinons maintenant ce dernier, il est composé de quatre morceaux :

1. Grand carré construit sur $a = a^2$ ou $3 \times 3 = 3^2 = 9$
2. Petit carré construit sur $b = b^2 = 2 \times 2 = 2^2 = 4$
3. 1er rectangle ayant a et b comme côtés. . . . . $= a\,b = 3 \times 2 = 6$
4. 2e rectangle ayant a et b comme cotés . . . . $= a\,b = 3 \times 2 = 6$

(3 et 4 ensemble) $= 12$

Ces quatre morceaux, vous le voyez, correspondent d'abord à un grand et à un petit carré, celui de a^2 et celui de b^2 ; ensuite à deux rectangles dont la surface n'est autre que le *produit* de a par b.

On a donc finalement

Carré de $a + b = a^2 + b^2 + ab + ab$ (ou 2 fois ab).

Carré de $(3 + 2) = 3^2 + 2^2 + (3 \times 2) + (3 \times 2)$ ou 2 fois 3×2.

En effet :

$$\text{carré de } 5 = (3+2)^2 = 25$$

ou $$\text{carré de } (3+2) = 3^2 + 2^2 + 2(3 \times 2) = 25$$

Cette fois le mécanisme de la génération du carré d'une somme ne peut nous échapper et nous le comprenons à merveille.

On obtiendrait d'une façon analogue le carré d'une

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fig. 118. — Table de Pythagore.

différence de $a-b$ par exemple, et je vous laisse le soin de l'effectuer.

La Table dite de Pythagore (fig. 118) n'est qu'une appli-

cation des principes exposés plus haut au sujet de la multiplication ; elle sert aussi à la division : c'est une table qu'on nomme à double entrée, car les produits cherchés sont en regard de deux colonnes différentes, l'une horizontale, l'autre verticale.

Mais la géométrie ne s'arrête pas là ; elle nous apprendra un peu plus loin, même à extraire des racines carrées à l'aide d'une règle et d'un compas et cet exercice sera bien de nature à lui valoir l'estime d'un grand nombre d'écoliers que rebutent des extractions de racines.

EXERCICES ET APPLICATIONS

99. *Quelle est la surface d'un carré dont le côté a 17 m. 3?*

$$S = c^2$$

donc :

$$S = 17,3 \times 17,3 = 299 \text{ m}^2, 29.$$

(Pour ce problème, et les analogues, ainsi que pour l'extraction des racines carrées, on se servira des Tables insérées dans l'*Arithmétique*, ou mieux dans le *Formulaire de Mathématiques*, qui réunit toutes ces Tables).

100. *Un carré a une superficie de 13 ha 69 ares ; on demande son côté et son périmètre, c'est-à-dire le pourtour ?*

On réduit en mètres carrés, soit 136900 m^2 et l'on a :

$$S = c^2 ;$$

donc

$$c = \sqrt{S} ;$$

on prendra donc la racine carrée de 136900 qui est 370. Ainsi, le côté ayant 370 m. le pourtour ou *périmètre* aura :

$$4 \times 370 = 1480 \text{ m.}$$

101. *Trouver l'aire d'un rectangle qui a 25 m, 42 de base et 18 m. 3 de hauteur.*

$$S = b \times h \text{ ou } 25{,}42 \times 18{,}3 = 465 \text{ m}^2, 186.$$

102. *Trouver la surface d'un losange dont les diagonales sont 15 m, 6 et 9 m, 8.*

D'après le n° 90, il suffit de multiplier entre elles les diagonales et de prendre la moitié du produit. On aura donc $\frac{15{,}6 \times 9{,}8}{2} = 76$ m, 44.

103. *La diagonale d'un carré vaut 12 mètres, quelle est sa surface ?*

D'après le n° 90, on peut considérer le carré comme une sorte de losange. On aura donc

$$S = \frac{12 \times 12}{2} = 72 \text{ m}^2.$$

104. *Un jardin a 45 mètres de long sur 28 de large ; on établit tout autour une allée ayant un mètre de largeur. Quelle surface reste t-il à cultiver ?*

La surface à cultiver aura 43 m. et 26 m. comme dimensions : on aura donc $43 \times 26 = 1118\ m^2$.

105. *Démontrer que si l'on prena sur les côtés d'un carré, à partir de chaque sommet, des longueurs égales, en marchant dans le même sens, on obtient les 4 sommets d'un second carré (fig. 119).* En effet les triangles rectangles ainsi déterminés sont égaux, puisque les côtés de l'angle droit sont égaux deux à deux. Donc les hypothénuses (côtés du quadrilatère intérieur) sont égales. Prouvons que les angles de ce quadrilatère sont droits : 1 et 2 sont complémentaires, car 2 est complémentaire de 3 (n° 57) qui égale 1. Donc $1 + 2 = 90°$ donc 4 (angle restant) vaut 90°.

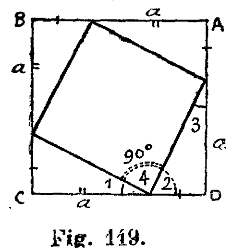


Fig. 119.

106. *Si par un point de la base d'un triangle isocèle on mène deux parallèles aux côtés égaux, 1° leur somme est constante ; 2° il en est de même du périmètre du parallélogramme ainsi déterminé (fig. 120).*

Il faut prouver que $m + p = K$ (constante). Tout

d'abord nous remarquerons que les parallèles aux côtés, menées à partir de D, déterminent des triangles isocèles 1 et 2.

Car angle D = angle A (correspondants) et A = B (tr. isocèle).

Donc triangle 1 est isocèle ; raison analogue pour 2.

Donc $p = p' = p''$ et $m = m' = m''$ pour la raison indiquée et en vertu des parallèles.

Donc

$$m + p = m'' + p' = \text{CB}$$

côté du triangle isocèle.

Ainsi $m + p$ vaut toujours un côté, donc deux fois $m + p$ ou $m + p + m'' + p''$ périmètre du parallélogramme vaudra la somme des 2 côtés du triangle isocèle.

Fig. 120.

107. *Quel est le côté d'un carré, sachant que si l'on ajoute 2 m. à sa base et 3 m. à sa hauteur, le rectangle obtenu a 366 m. de plus que le carré.*

Soit x le côté du carré : on aura

$$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 366$$

D'où x côté du carré égale 72 m.

108. *Trouver les deux dimensions d'un rectangle sachant que sa surface est de 211932 m² et que sa hauteur n'est que les 7/9 de la base.*

On peut écrire que la base vaut 9 x, tandis que la hauteur = 7 x, d'où l'équation suivante :

$$7x \times 9x = 211932.$$

D'où l'on tire pour la valeur de x, 58 m. La base vaudra donc $9x = 522$ m. et la hauteur $7x = 406$ m.

109. *Trouver les deux dimensions d'un rectangle dont la superficie est de* 8100 m^2. *sachant que son périmètre vaut* 362 m.

Soit x et y les deux dimensions : $x + y = 1/2$ périmètre $= \frac{362}{2} = 181$.

Mais on a aussi $xy = 8100$. Nous aurons donc les deux équations suivantes :

$$(1) \qquad x + y = 181$$

$$(2) \qquad xy = 8100.$$

Cela revient à trouver 2 nombres connaissant leur somme et leur produit. D'après ce que nous avons dit en Algèbre sur les propriétés des racines de l'équation du second degré (V. *Algèbre* p.p. 135 et 136) nous pourrons poser immédiatement l'équation.

$$x^2 - 181\,x + 8100 = 0$$

d'où $x = 100$; il restera pour la hauteur 81 m.

110. *On demande les dimensions d'un rectangle dont la superficie est de* 2646 m^2., *sachant que la base a* 21 *mètres de plus que la hauteur.*

Les dimensions du rectangle pourront être représentées par x et $x + 21$ nous aurons donc

$$x(x + 21) = 2646$$

ou

$$x^2 + 21x - 2646 = 0$$

d'où $x = 42$ m. (hauteur) ; on a pour la base

$$42 + 21 = 63 \text{ m.}$$

111. *Je voudrais peindre une salle, murs et plafond avec une peinture qui me reviendrait à 0 fr. 50 le mètre carré. Cette salle rectangulaire a 9 m. 50 de long sur 7 m. 80 de large et 4 m. de hauteur. Quelle sera la dépense ?*

On prendra le périmètre de la salle et la surface des murs sera donnée par le périmètre multiplié par la hauteur, puis on ajoutera la surface du plafond.

Développement des 4 murs :

$$7,8 + 7,8 + 9,5 + 9,5 = 34 \text{ m. } 6$$

Surface des murs : $34,6 \times 4 = 138$ m². 4

Surf. du plafond : $9,5 \times 7,8 = 74$ m², 1

Total 212 m². 5

212 m² 5 à 0 fr. 50 le mètre = 106 fr. 25, total de la dépense.

112. *Quelle serait la dépense si au lieu de peindre les murs, je collais du papier de tenture qui me revien-*

drait tout posé à 2 fr. 75 le rouleau? Je sais que chaque rouleau a 8 m. de long sur 0 m. 45 de large.

La surface de chaque rouleau est :

$$8 \times 0{,}45 = 3 \text{ m}^2, 60.$$

La surface des murs étant de 138 m²,4, je vais diviser par 3,60 pour avoir le nombre de rouleaux nécessaires pour couvrir cette surface.

$\frac{138{,}4}{3{,}6} = 38{,}4$; soit 39 rouleaux en raison de la perte.

Prix des rouleaux : 39 × 2 fr. 75 = 107 fr. 25.

Le prix du plafond reste le même, soit

$$74 \text{ m}^2, 1 \text{ à } 0 \text{ fr. } 50 = 37 \text{ fr. } 05.$$

Au total je paierai donc plus cher que précédemment puisque j'aurai comme dépense :

$$107{,}25 + 37{,}05 = 144 \text{ fr. } 30.$$

113. *Un terrain ayant une forme triangulaire a été vendu 1530 fr. La base a 150 m., la hauteur 85 m. Dites le prix de l'are de ce terrain.*

$$\text{Surface} = \frac{150 \times 85}{2} = 6375 \text{ m}^2 \text{ ou } 63 \text{ ares, } 75.$$

$$\text{L'are revient à } \frac{1530 \text{ fr.}}{63{,}75} = 24 \text{ fr.}$$

114. *Un triangle a 36 m. 75 de base et 470 m²,40 de superficie. On demande sa hauteur.*

D'après la formule $S = \frac{bh}{2}$ on a $S = b \times \frac{h}{2}$

d'où $$\frac{h}{2} = \frac{S}{b}.$$

Ainsi, en divisant la surface par la base j'aurai la moitié de la hauteur. Dans le cas présent j'aurai

$$\frac{h}{2} = \frac{S}{b} = \frac{470,4}{36,75} = 12 \text{ m}, 8.$$

La hauteur vaudra donc $12,8 \times 2 = 25$ m, 60.

On ferait le même raisonnement si on demandait l'autre dimension.

115. *Un champ ayant la forme d'un trapèze a pour dimensions : grande base = 135 m ; petite base = 105 m ; hauteur = 70 m. Quelle est la valeur de ce champ à raison de 3500 fr. l'hectare.*

Surface $= \left(\frac{b + b'}{2}\right) h$ ou $\frac{135 + 105}{2} \times 70 = 8400 \text{ m}^2$ ou 0 ha, 84.

Prix de revient : $0,84 \times 3500$ fr. = 2940 fr.

116. *Un trapèze a une surface de 2240 m² et une hauteur de 56 m. On demande la longueur de la petite base si la grande base a 60 m.*

La surface divisée par la hauteur nous donnera la demi-somme des bases, soit :

$\frac{2240}{56} = 40$ m. dont le double = 80 m. somme des bases.

La petite base aura donc $80 - 60 = 20$ m.

117. Démontrer que les trois hauteurs d'un triangle concourent en un même point.

Soit le triangle ABC (fig. 121) ; je mène les parallèles aux bases.

Les trois triangles partiels ainsi ajoutés sont égaux au premier (nos 74 et 88) donc les sommets A, C, B sont les milieux des côtés du grand triangle A'B'C' et les hauteurs du triangle primitif deviennent les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés du grand triangle. Or nous avons vu que ces perpendiculaires se rencontraient au même point (no 33,2) ce qui démontre la proposition.

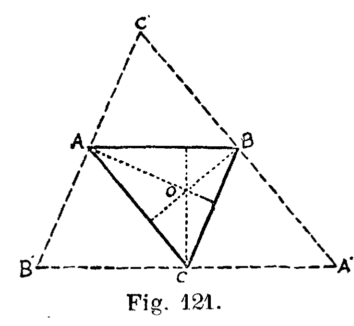


Fig. 121.

118. *Comparer la surface du triangle A'B'C' avec celle de ABC dans la figure précédente.* Nous voyons immédiatement que les côtés ayant doublé, la surface du grand triangle vaut 4 fois celle du petit, puisque les triangles formés sont égaux entre eux. On obtiendrait un résultat analogue en doublant les côtés d'un carré, ou d'une figure quelconque, ce qui prouve que les surfaces des polygones sont entre elles comme le carré des dimensions homologues.

Ainsi, doubler les dimensions d'un dessin, c'est rendre sa surface 4 fois plus grande ; 9 fois si les dimensions sont triplées, etc.

119. *Construire un triangle isocèle connaissant son périmètre et sa base.*

Soit MN le périmètre (fig 122) ; de chaque côté du milieu O, je porte la moitié de la base. Celle-ci sera représentée en entier par AD ; dès lors, il est évident que les portions restantes AM et DN, égales, sont les côtés, il suffit de les rabattre jusqu'à la rencontre de la hauteur. Le point d'intersection B est le sommet. Pratiquement, il suffira de prendre une ouverture de compas égale à AM et, du point A comme centre, de couper par un arc la perpendiculaire OX.

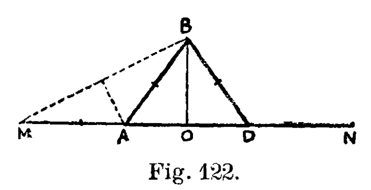


Fig. 122.

120. *Supposons qu'on ait donné le périmètre et la hauteur,* le problème est moins facile, car si B est déterminé, A et D ne le sont pas. Mais la construction précédente va nous mettre sur la voie de la solution. Je remarque en effet que si le triangle était construit, AB égalerait AM. Donc si je joignais MB j'aurais un triangle isocèle. Il s'ensuit que si j'élève une perpen-

diculaire sur le milieu de MB, cette droite passera par A et déterminera ce point. Ainsi la construction est toute dictée. Je mènerai la hauteur sur le milieu du périmètre, je joindrai les extrémités M et N au sommet B; les perpendiculaires élevées au milieu de BM et de BN me donneront les sommets A et D.

121. *Un cerf-volant ayant la forme d'un losange a une diagonale double de l'autre. Sa surface est de 4 dm² 84. Calculer ses deux diagonales.*

La surface étant le 1/2 produit des deux diagonales représente donc ici *le carré* de la petite diagonale; celle-ci vaut donc :

$$\sqrt{4,84} = 2 \text{ dm}, 2.$$

Et la grande diagonale vaut 2 dm, $2 \times 2 = 4$ dm, 4

122. *La base d'un champ triangulaire est double de sa hauteur et sa superficie est d'un hectare. Calculer ses deux dimensions.*

Le raisonnement est le même que dans le problème précédent.

La hauteur sera donc de

$$\sqrt{10000} = 100 \text{ mètres}$$

et la base aura $100 \times 2 = 200$ m.

123. *L'aire d'un champ ayant la forme d'un trapèze est 1 ha, 21 et sa hauteur mesure 55 mètres. Calculer*

ses deux bases sachant que la petite est les 3/5 de la grande.

La surface du trapèze vaut en mètres carrés 12100 m² qui représentent le produit de la hauteur par une moyenne entre les deux bases ; cette moyenne (ou demi-somme) vaudra donc

$$\frac{12100}{55} = 220 \text{ m.}$$

Et la somme des deux bases sera $220 \times 2 = 440$ m.

Il ne reste plus qu'à partager 440 m. en deux parties qui soient entre elles comme 3 est à 5.

Partageons en 8 parties, nous aurons :

$$\frac{440}{8} = 55\text{; d'où} \begin{cases} \text{Petite base} = 55 \times 3 = 165 \text{ m.} \\ \text{Grande base} = 55 \times 5 = 275 \text{ m.} \end{cases}$$

Nota. — On trouvera dans toutes les Arithmétiques à l'usage des Ecoles, des quantités de problèmes analogues sur les surfaces ; nous aurions pu en donner d'autres, mais ceci ne rentre pas dans notre programme. Notre collection de volumes est faite pour aider nos lecteurs à *comprendre* les sciences diverses : il doit suffire qu'on trouve ici un exemple de problèmes dans chaque genre. Nous avons, avant tout, voulu ménager la place et éviter les répétitions. De même, nous avons toujours eu soin de laisser de côté les problèmes compliqués qui ne servent qu'aux examens ; ce qu'il faut surtout, c'est arriver à comprendre

les principes, c'est-à-dire les notions primordiales sur lesquelles doit s'appuyer le raisonnement. Encore une fois nous ne cherchons pas à publier des livres *classiques* proposant à l'élève des casse-tête chinois, mais des livres *utiles* à tous.

QUATRIÈME LEÇON

LA CIRCONFÉRENCE

Nous avons déjà étudié quelques propriétés de la circonférence dans la première leçon ; il faut compléter ces notions pour aborder des propositions nouvelles. Insistons d'abord sur quelques définitions (v. fig. 123 et 124).

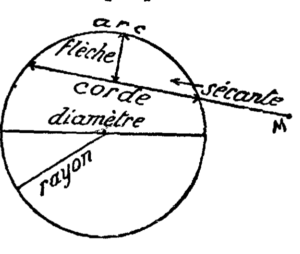


Fig. 123.

124. Si d'un point quelconque M, extérieur à la circonférence, nous menons une droite coupant le cercle, cette droite prend le nom de sécante; sa portion à l'intérieur du cercle est ce que nous avons appelé *corde*. L'*arc* ainsi déterminé est dit *sous-tendu* par la corde. Celle-ci à son tour *sous-*

tend l'arc ; en même temps elle donne naissance à deux portions de cercle généralement inégales qui sont des segments. Le diamètre est la seule corde qui divise le cercle en deux segments égaux.

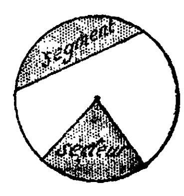


Fig. 124.

Le secteur est la surface du cercle comprise entre l'arc et deux rayons. Ainsi, segments et secteurs sont des surfaces, tandis que les arcs, les cordes, les rayons, etc., ne sont que des lignes (fig. 124).

125. Reprenons notre cercle en papier (fig. 125) préalablement plié en 4, afin d'obtenir deux diamètres perpendiculaires l'un à l'autre. Plions encore la partie supérieure en un point P du rayon OC, de manière que C tombe en un point de PO, le pli EPF sera perpendiculaire à CO en P, donc EPF sera parallèle au diamètre AB (nº 46, fig. 64).

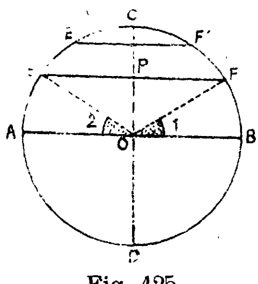


Fig. 125.

Plions de nouveau le cercle en rabattant la droite sur la gauche autour de CD comme charnière. F tombe en E ; ces points sont d'ailleurs symétriques (nº 45) ; donc P est le milieu de EF. D'où il suit que *si nous*

abaissons une perpendiculaire sur une corde, la corde se trouvera divisée en deux moitiés ; le théorème est général, car nous n'avons pas choisi le point P ; pour une corde E'F' menée plus haut, le raisonnement eût été le même.

126. Autre constatation : Menons EO = OF comme rayons et rabattons de nouveau autour de CD, les arcs AE et BF coïncident ; il en est de même de OE et de OF, dont angle 1 = angle 2.

Ainsi *les deux parallèles AB, EF ont déterminé des arcs égaux qui correspondent à des angles égaux.* Nous nous doutions déjà de ce dernier point, puisque nous avons montré précédemment que nous pouvions toujours mesurer des angles par leurs arcs, à la condition évidemment que les arcs soient pris sur une même circonférence ou sur des circonférences d'égal rayon.

127. Pour une même raison, arc E'A = F'B, et cela restera vrai, même si nous menons de nouvelles parallèles ou si E'F s'éloigne du centre tout en restant parallèle à sa première position. Dans ces conditions, E', F' toujours symétriques, se rapprocheront du point C. Lorsque les deux points E' et F' se confondront avec C, la droite ne sera plus sécante, elle *touchera* la circonférence en un seul point C, elle sera devenue *tangente* (de *tangere* toucher). Mais, dans son

mouvement, comme elle a gardé son parallélisme avec sa première position, elle n'a jamais cessé d'être perpendiculaire à OC ; donc, quand elle est à l'extrémité du rayon, en C, elle est encore perpendiculaire.

Ainsi nous saurons que *la tangente est perpendiculaire à l'extrémité du rayon aboutissant au point de contact* avec la circonférence.

128. Cette propriété est très importante et nous aurons occasion de nous en rendre compte par la suite ; pour l'instant, elle va nous permettre de *mener une tangente en un point donné de la circonférence.*

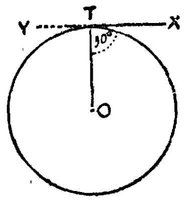


Fig. 126.

Soit la circonférence de centre O (fig. 126) ; on nous demande de mener une tangente au point T. Nous tirerons le rayon OT, en T nous élèverons une perpendiculaire à TO, soit TX ; c'est la tangente demandée. Nous aurions pu la mener aussi bien sur la gauche, nous aurions eu TY qui n'est que la prolongation de TX, donc la même tangente.

Angles au centre et angles inscrits.

129. Nous venons de voir qu'un angle peut se mesurer par son arc, puisque angles et arcs se correspondent ; mais ceci suppose que l'arc a été décrit avec

un compas dont l'une des pointes était appliquée sur le sommet de l'angle.

Dans ce cas l'angle O (fig. 127) est appelé angle au centre (sous-entendu *de la circonférence*).

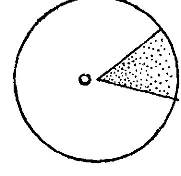


Fig. 127.
Angle au centre.

Mais si, dans une circonférence, un angle avait son sommet sur cette circonférence même, nous dirions que l'angle est inscrit (sous-entendu *dans* la circonférence fig. 128).

Fig. 128.
Angle inscrit.

Eh bien, là encore, nous avons un moyen très simple pour le mesurer par son arc.

Supposons d'abord pour diviser les difficultés que notre angle inscrit ressemble à celui de la figure 129, c'est-à-dire que l'un de ses côtés soit un diamètre, je vais vous montrer que cet angle A a pour mesure non pas l'arc CB (puisqu'il n'est pas au centre) mais exactement sa moitié.

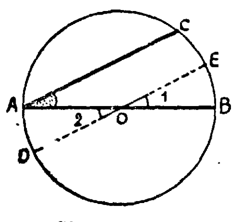


Fig. 129.

Menons un diamètre DE parallèle à AC, les arcs AD et CE sont égaux, puisqu'ils sont compris entre 2 parallèles (nº 126). Mais l'arc AD égale aussi l'arc BE, car ils appartiennent à des angles au

centre (1 et 2) **qui, opposés par le sommet, sont** égaux.

Ainsi arc CE = AD = EB, donc CE = EB, car deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles.

Mais l'angle A a même valeur que 1 (ils sont correspondants) il aura donc même mesure, soit l'arc EB moitié de CB.

130. On arrive autrement au même résultat et des deux méthodes vous choisirez celle qui vous paraîtra la plus simple.

Voyez la figure 130 : il suffit de montrer que l'angle A égale la moitié de l'angle 1 qui a pour mesure CB, puisque 1 est un angle au centre.

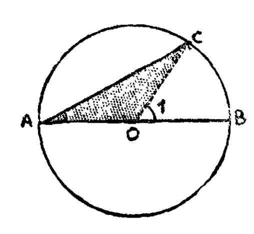


Fig. 130.

Nous avons un triangle ACO qui est isocèle, car AO et CO sont égaux comme rayons. Maintenant l'angle 1 est *extérieur* au triangle et nous avons vu (nº 66) que dans ces conditions 1 = C + A, mais comme C = A dans le triangle isocèle, nous pouvons dire que angle 1 = 2A, donc A est la moitié de 1, il aura donc pour mesure la moitié de la mesure de 1, c'est-à-dire 1/2 CB.

131. Il vous souvient que nous avons supposé, pour simplifier le problème que l'un des côtés était un diamètre ; c'est là un cas particulier et il faut examiner celui plus général dans lequel l'angle inscrit est quelconque comme dans les figures 125 et 131.

Avec un peu de réflexion, je suis persuadé, que vous trouveriez très vite l'artifice à employer... ; il suffit

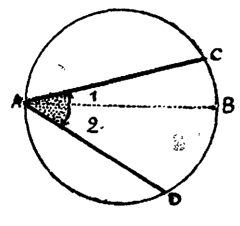


Fig. 131.

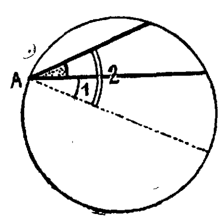


Fig. 132.

simplement de diviser l'angle en deux par un diamètre. Dès lors je dirai :

$$\text{Angle } A = 1 + 2 ;$$

Donc

$$\text{mesure de } A = \text{mes. de } 1 + \text{mes. de } 2$$

ou la mesure de 1 = 1/2 CB (cas précédent)

la — de 2 = 1/2 BD (id.)

Mais 1/2 CB + 1/2 BD = 1/2 CD, c'est évident.

Donc je conclurai que la mesure de l'angle A vaut bien encore la moitié de l'arc intercepté par ses côtés.

Fort bien, direz-vous, mais il se peut que l'angle A soit comme dans la figure 132, où le diamètre tombe

en dehors de lui. Qu'à cela ne tienne : au lieu d'une somme nous écrirons une différence et nous dirons $A = 2 - 1$.

Le reste se démontrera d'une façon analogue au cas précédent, si bien que le théorème est vrai pour tous les angles inscrits.

132. La conséquence de cette proposition est celle-ci : c'est que *si nous inscrivons des angles dans le même segment, tous les angles que nous pourrons tracer seront égaux.*

Prenons en effet 2 points A et B sur une circonférence (fig. 133) et dans l'arc qui est à gauche, inscri-

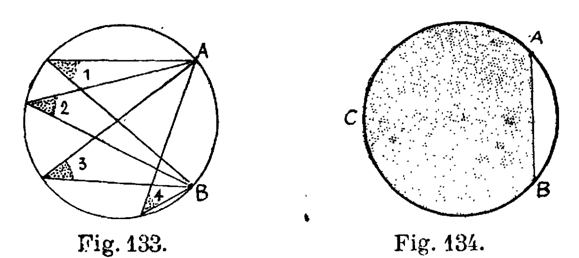


Fig. 133. Fig. 134.

vons des angles quelconques 1, 2, 3, 4, dont les côtés par conséquent aboutiront tous aux points A et B; nous voyons clairement que ces angles sont égaux, puisqu'étant inscrits, ils ont tous pour mesure la moitié de l'arc AB.

Menons maintenant la corde AB dans la figure 134

qui n est autre que la reproduction exacte de la précédente, mais dans laquelle j'ai supprimé les angles, le segment ombré est dit *capable* d'un angle donné; ici il est capable de l'angle dont la commune valeur était celle de 1, 2, 3, 4.

Nous pouvons le vérifier : promenons sur l'arc ACB, un graphomètre (ou un rapporteur) et en chaque point où nous nous arrêterons, visons A et B, nous trouvons toujours le même angle; nous dirons que la corde nous apparaîtra de même *grandeur angulaire.*

Ceci nous prouve que le *lieu géométrique d'où une droite immobile est vue sous le même angle est toujours une portion de circonférence.*

138. Autre résultat important et qui va corroborer ce que nous savions déjà : dans une moitié de cercle inscrivons un angle quelconque A (fig. 135); cet angle est *droit.*

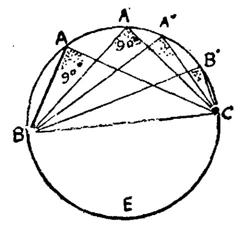


Fig. 135.

Pourquoi ? Parce qu'il a pour mesure la moitié de l'arc BEC intercepté. Or BEC = 180° ou 2 droits, dont la moitié donne 90° ou 1 droit. Donc le triangle est rectangle en A.

Bien mieux, tous les triangles ayant leur sommet

sur la 1/2 circonférence et même base B C (diamètre) seront rectangles parce que A′, A″, B′ sont droit évidemment.

Ceci confirme ce que nous avions constaté au sujet du triangle rectangle : nous avons vu en effet au nº 78 que la médiane issue du sommet de l'angle droit vaut la moitié de l'hypothénuse ; donc le milieu de l'hypothénuse est le centre d'une circonférence passant par les trois sommets.

Nous allons immédiatement profiter de ce résultat pour résoudre le problème suivant.

134. On vous demande de mener une tangente à une circonférence, d'un point extérieur désigné, comment vous y prendrez-vous ? Ceci va me donner l'occasion de vous enseigner un artifice bien connu des mathématiciens, et qui nous a été très utile en Algèbre. Vous vous rappelez que le plus souvent, après avoir désigné par x l'inconnue, nous faisions toute la suite des opérations comme si x était une quantité déjà trouvée. Nous ferons de même ici ; nous supposerons le problème résolu. Soit une circonférence de centre O et B le point

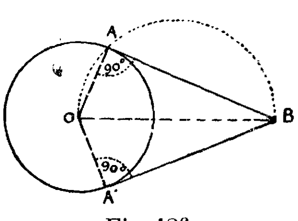


Fig. 136.

extérieur. Si notre tangente BA (fig. 136) était dessinée, nous pourrions joindre son point de contact avec O ; AO serait dès lors perpendiculaire à la tangente et le triangle AOB serait rectangle en A. Mais nous voyons immédiatement que A se trouve sur une autre circonférence dont OB (hypothénuse) est le diamètre (nº précédent) ; le centre de cette circonférence doit donc être au milieu de OB.

Et voilà qui m'indique la méthode à suivre : je joindrai OB, j'en prendrai le milieu M ; puis je tracerai la circonférence passant par O et par B, le point A où cette circonférence coupera la première sera le point de tangence ou de contact, et AB sera la tangente demandée. J'aperçois en même temps qu'il y a deux solutions, car la grande circonférence coupe aussi la première en A′, point symétrique de A, et je vois par le fait même que les deux triangles BAO, BA′O sont égaux. Ils sont rectangles tous les deux en A et en A′, nous l'avons dit ; ils ont une hypothénuse commune OB, et un côté de l'angle droit égal (OA = OA′ rayons) ; donc BA = BA′. D'où je conclus que les deux tangentes issues d'un même point et menées à une même circonférence sont égales.

135. Autre problème : **Par un point extérieur ou intérieur donné comme centre, décrire une circonférence tangente à une autre donnée.**

Soient O la circonférence donnée, O′ le point extérieur (fig. 137) ; je joins O′O ; O′T est le rayon de la seconde circonférence tangente en T à la première. Notez qu'elles sont toutes les deux tangentes à une droite élevée en T perpendiculairement à OO′.

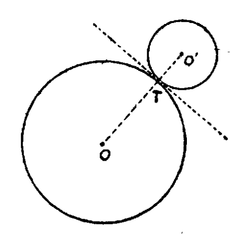


Fig. 137.
Le point est extérieur.

Solution analogue dans le cas où le point O′ est intérieur (fig. 138). On joint OO′ qu'on prolonge jusqu'à la rencontre de la circonférence donnée, soit en T ; TO′ est le rayon de la circonférence intérieure. Une tangente en T sera commune aux deux circonférences.

Ces constructions sont bien connues des dessinateurs, des sculpteurs et des architectes qui les emploient couramment pour faire des *raccords*, c'est-à-dire pour joindre des droites avec des arcs de cercle (ou même d'autres courbes que nous étudierons quelque jour) sans soubresauts, sans coudes ou mieux sans *jarrets*, comme on s'exprime en termes de métier.

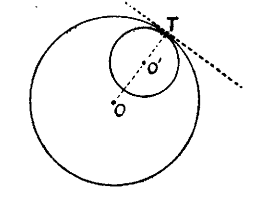


Fig. 138. — Le point est à l'intérieur.

Nous allons d'ailleurs donner quelques exemples

pour faire saisir le mécanisme de l'application des principes précédents au cours des exercices se rapportant à ce chapitre.

EXERCICES ET APPLICATIONS

136. *Raccorder par un arc de circonférence une droite donnée avec un point donné.* AB est la droite (fig. 139) dont il faut raccorder l'extrémité A avec un point extérieur C.

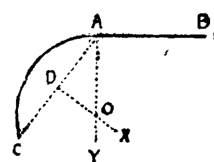


Fig. 139. — Raccord d'un arc et d'une droite.

Nous savons que la circonférence doit passer par A et par C. Son centre sera donc sur la perpendiculaire élevée au milieu de AC (nº 31) donc sur DX ; mais comme elle doit être tangente à AB en A, le centre doit se trouver en même temps (nº 127) sur la perpendiculaire AY élevée à l'extrémité A de AB. Donc il est nécessairement à l'intersection O de DX et de AY.

137. *Raccorder un arc donné ABC à un autre arc passant par un point donné D* (fig. 140 et 141).

Il y a deux cas qui correspondent aux deux solutions examinées au nº 135 : Deux circonférences de rayon déterminé peuvent être tangentes extérieurement ou intérieurement. La construction est la même. Le centre

de l'arc qu'on doit construire se trouve à la fois sur la ligne des centres, ligne qui passe par le point de rac-

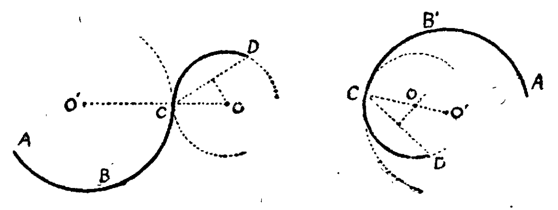
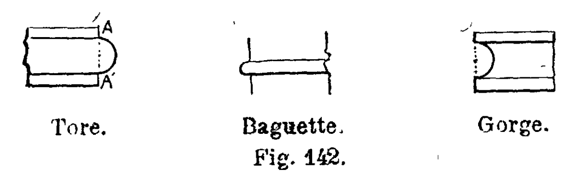


Fig. 140. Fig. 141.
Raccords de deux arcs de circonférence.

cord C, donc sur OCO', et sur la perpendiculaire au milieu de la corde CD, joignant le point de raccordement avec le point donné O.

138. *Raccorder deux parallèles par un arc de cercle.* 1° Il suffit de décrire la 1/2 circonférence dont le centre est sur le milieu de la perpendiculaire



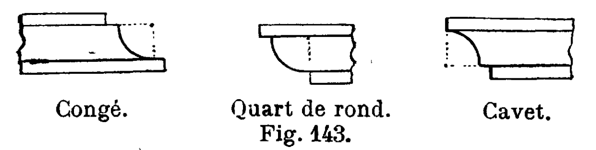
Tore. Baguette. Gorge.
Fig. 142.

comme AA' (fig. 142). Cette courbe en architecture prend le nom de *tore* ou de *gorge*.

Le *congé* est un quart de circonférence en retrait; s'il est en relief, comme le tore, il s'appelle *quart de rond* (fig. 143).

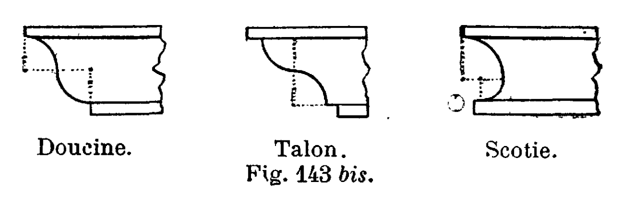
La *doucine* est un peu la combinaison des deux qui l'ont inspirée (fig. 143 *bis*).

2° Les points de contact, lorsqu'il s'agit de raccorder



Congé. Quart de rond. Cavet.
Fig. 143.

deux parallèles ne sont pas toujours donnés sur une perpendiculaire commune ; le cas devient alors plus



Doucine. Talon. Scotie.
Fig. 143 *bis*.

difficile à résoudre. Nous donnerons la construction sans entrer dans les détails. Soient A et C à raccorder (fig. 144). J'élève d'abord des perpendiculaires en A et en C ; je prolonge BA jusqu'en H ; puis je prends HA′ = HA (en décrivant 1/4 de circonférence) et je divise en deux A′C. Si par le milieu O je mène OO′ parallèle à CD, O′ est le centre du grand arc de raccordement et O celui du petit arc.

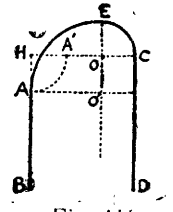


Fig. 144.
Arc rampant.

Je vous laisse le soin de démontrer que sur la figure O′A = D′E tandis que OC = OE, ce qu'il fallait

obtenir pour un raccord parfait. Ce raccordement, en architecture, est connu sous le nom *d'arc rampant.*

139. *Raccorder par un arc de circonférence deux droites non parallèles ; l'un des points de raccordement est donné.* Le cas se ramène aux tangentes concourantes (n° 134). Il suffit de prolonger les deux droites jusqu'à ce qu'elles se rencontrent. Le centre de la circonférence tangente (fig. 145) est à la fois sur la bissectrice de l'angle obtenu et sur la perpendiculaire élevée du point A donné.

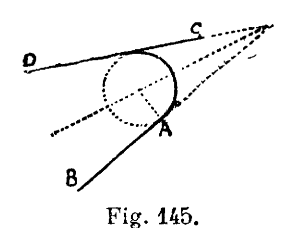


Fig. 145.

140. Mener une tangente commune à deux circonférences. 1° La tangente peut être *extérieure.* Je joins les centres OO′ (fig. 146). En O je décris une troisième circonférence dont le rayon sera égal à la différence des rayons (R − *r*) des deux circonférences données. Soit OA cette différence. Je mène la tangente AO′ ; ce problème est connu (v. n° 134) ; puis, après

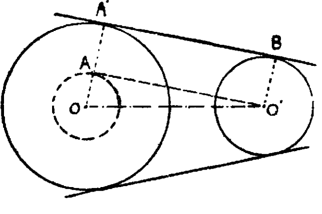


Fig. 146.

avoir prolongé OA jusqu'à A′, je mène O′B parallèle à OA′.

Je dis que A′B est la tangente commune. Il suffira de prouver que les angles en A′ et en B sont droits. Cela est facile si nous remarquons que A′B AO′ est un rectangle.

En effet AA′ = O′B (puisque OA est la différence des deux rayons) et lui est parallèle par construction. Le quadrilatère envisagé est donc au moins un parallélogramme ; mais les angles en A sont droits (en raison de la tangente AO′) ; notre parallélogramme est donc rectangle ; par conséquent, les angles en A′ et en B sont droits.

On trouverait une autre tangente symétrique dans le bas de la figure 146.

2° La solution de la figure 147 répond aussi à l'énoncé ; mais cette fois la tangente est *intérieure*. Pour la construire, nous décrirons de O comme centre une circonférence dont le rayon sera égal non à la différence, mais à la somme des rayons, soit $R + r$; nous mènerons encore une première tangente O′A, puis nous effectuerons une construction analogue à la précédente et nous verrons encore que le parallélogramme AA′BO est un rectangle.

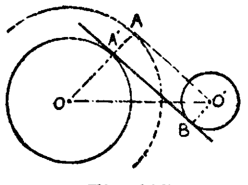


Fig. 147.

141. *Un triangle équilatéral est-il nécessairement équiangle, en d'autres termes, si un triangle a ses 3 côtés égaux, s'ensuit-il que ses 3 angles sont égaux ?*

Soit le triangle équilatéral ABC (fig. 148); par les 3 sommets faisons passer une circonférence ; les côtés sont des cordes égales; ces cordes correspondent donc à des arcs égaux. Donc arc AB = arc AC = arc BC ; il s'ensuit que les angles ABC, qui sont inscrits ont même mesure, la moitié d'arcs égaux ; ils sont donc égaux entre eux et j'en conclus qu'un triangle dont les trois côtés sont égaux doit aussi avoir ses trois angles égaux. Leur somme étant égale à 180°, chacun des angles vaut le tiers de 180°, soit 60°.

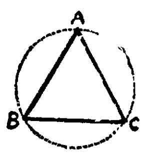


Fig. 148.

Tracé de quelques courbes très employées.

En architecture, en dessin, en menuiserie, en sculpture, on emploie très souvent des motifs de décoration qui empruntent les mêmes courbes bien connues : ces courbes sont principalement l'ove, l'ovale, l'anse de panier, la fausse spirale.

142. L'ove doit son nom à sa forme qui rappelle celle de l'œuf. Pour la dessiner tracez tout d'abord une circonférence avec ses deux diamètres perpendiculaires AB, CD (fig. 149). Tracez ACE et BCF ; de A

comme centre décrivez l'arc BE ; puis de B l'arc AF ; enfin de C comme centre tracez l'arc FE. L'arc ADB fait partie de la courbe, mais la portion intérieure de la circonférence ne sert que pour la construction.

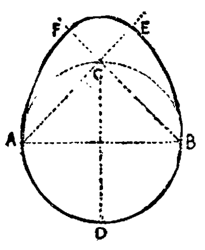
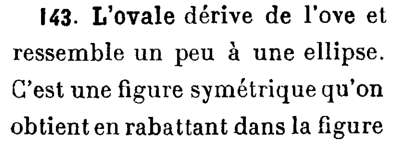
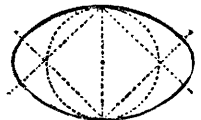
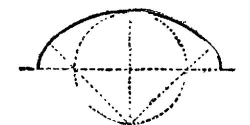


Fig. 149. — Tracé d'un ove.



143. L'ovale dérive de l'ove et ressemble un peu à une ellipse. C'est une figure symétrique qu'on obtient en rabattant dans la figure 149, la partie supérieure autour de AB comme charnière ; la figure complète donne la courbe de la figure 150. Toute la circonférence intérieure ne ser qu'à la construction.


Fig. 150. — Tracé d'un ovale.


Fig. 151. — Anse de panier (demi-ovale).

144. L'anse de panier très employée aussi n'est autre qu'une demi-ovale (fig. 151).

145. La fausse spirale est une courbe non fermée : on l'obtient en raccordant des arcs de cercles de plus

en plus grands. Elle peut être à 2 ou plusieurs centres constitués par les sommets de polygones réguliers. Nous donnons une spirale à 4 centres obtenus par un carré intérieur. Le dessin est assez clair pour se passer d'explication (v. fig. 152).

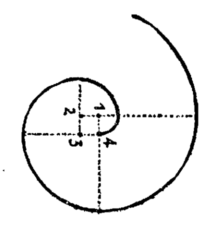


Fig. 152.
Fausse spirale.

146. *Démontrer que la somme des angles d'un quadrilatère quelconque est égale à 4 angles droits.* Rien de plus simple, il suffit de mener une diagonale; on décompose ainsi le quadrilatère (fig. 153) en *deux* triangles dont la *somme des angles* est égale à 4 droits ou 360°, puisque les 3 angles d'un *seul* triangle fournissent 180° ou deux droits.

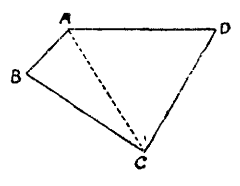


Fig. 153.

147. *Propriété d'un quadrilatère inscriptible dans une circonférence.* Prenons maintenant 4 points quelconques sur une circonférence (fig. 154) et réunissons-les par des cordes de façon à former un quadrilatère; nous dirons que celui-ci est inscrit (sous-entendu *dans la circonférence*). La somme des 4 angles vaut 4 droits d'après le numéro précédent; eh bien, dans

ce cas particulier, les angles opposés sont supplémentaires : Si A vaut 95°, C qui lui est opposé, vaudra 180 — 95 = 85°.

On le démontre très facilement : A, angle inscrit, a pour mesure 1/2 arc BCD; mais C (opposé) a pour mesure 1/2 arc BAD ; or l'arc BCD auquel j'ajoute BAD constituent le tour entier de la circonférence soit 360°, dont la moitié (mesure des deux angles réunis) me donne 180°.

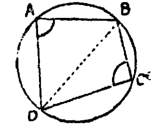


Fig. 154.

Voilà un exercice qui est un véritable théorème, nous ne tarderons pas à l'utiliser,

Passons maintenant à un autre genre d'exercices dont nos ciseaux depuis longtemps délaissés feront la plupart des frais.

148. *Déterminer sans compas, le centre d'une circonférence.*

On nous donne une circonférence, obtenue par exemple, en suivant avec un crayon le tour d'un vase bien rond, posé sur un papier blanc ; nous avons besoin de savoir où se trouve le centre, comment nous y prendrons-nous ? C'est le moment où jamais de mettre à profit ce que nous avons appris de géométrie.

La première méthode qui vient à l'esprit est celle qui est basée sur le n° 32 : on choisit trois points A,B,C, et sur le milieu des 2 cordes qui les réunissent, on

élève des perpendiculaires. Nous pouvons faire tout cela avec des papiers pliés : prendre la moitié d'une droite et élever une perpendiculaire en ce point milieu ; mais il y a un moyen plus expéditif.

Prenez une feuille de cahier : pliez-là en deux, de façon à obtenir une équerre, un angle droit ; présentez l'angle droit comme dans la figure 155, de manière que son sommet touche la circonférence, à l'intérieur. Les points d'intersection B et C des côtés de l'équerre avec la circonférence sont 2 sommets d'un triangle rectangle en A, et qui a BC pour hypothénuse. Mais alors BC est nécessairement un diamètre de notre circonférence, puisque A est un angle droit inscrit (n° 133). Il suffit de trouver O, milieu de BC (ce que je fais facilement en pliant BC) pour avoir le centre de la circonférence.

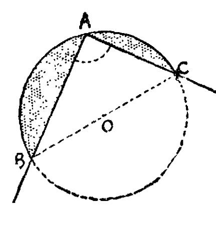


Fig. 155.

149. *Faire passer un arc de circonférence par 3 points non en ligne droite, et toujours sans compas.* Soient ABC (fig. 156) ; il s'agit de tracer l'arc de la circonférence *unique* qui passe par ses points. Je mettrai une seconde feuille de papier sous la première où sont marqués les 3 points. Je donne trois coups d'aiguille

pour repérer les 3 points ; je découpe cette seconde feuille suivant l'angle ABC que je fais coïncider avec les points marqués sur la première. Maintenant promenons notre angle en papier de manière que les côtés prolongés ci-dessous, s'appuient toujours sur les points A et C, le point B décrira l'arc de cercle demandé : Il suffira pratiquement de noter un certain nombre de positions de A assez rapprochées les unes de autres pour tracer ensuite la courbe à main levée.

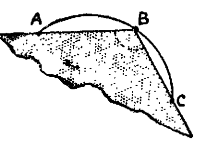


Fig. 156.

Vous avez compris sans que j'y insiste que nous avons utilisé cette proposition déjà démontrée (n° 132) que tous les angles inscrits dans un même segment sont égaux.

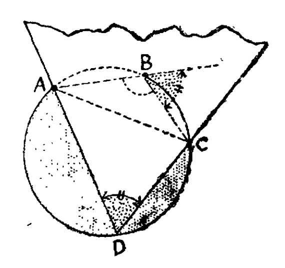


Fig. 157.

Voulez-vous maintenant décrire la circonférence complète : ce sera aussi simple. Découpez un angle supplémentaire de l'angle en B — il vous suffira pour cela de prolonger AB et de découper un angle égal à l'angle 1 — cet angle aura bien pour valeur l'angle inscrit dans le 2e segment ADC, d'après le n° 132. Promenez encore ce nouvel angle D, en ayant toujours

soin que ses côtés touchent sans cesse A et C ; le point D décrira un arc de circonférence.

150. *Diviser un angle ou un arc en 3 parties égales.* Nous avons vu comment on peut diviser un arc ou un angle en deux parties égales. On peut se demander par quel procédé on pourrait les diviser en 3 exactement. Eh bien, géométriquement, c'est-à-dire en se servant de la règle et du compas, on n'a pu trouver une méthode générale pour résoudre le problème. La *trisection* de l'angle ou de l'arc, comme disent les mathématiciens, est impossible.

Il y a cependant une exception qu'il faut connaître : c'est le cas où l'angle est droit. Soit en effet l'angle droit A (fig. 158). De A comme centre, je décris un arc de circonférence quelconque BC. Avec la même ouverture de compas, je décris le même arc, en prenant C comme centre ; soit D son intersection avec le 1er arc ; DB aura le 1/3 de 90°, soit 30°. Il en sera de même de l'angle qui lui correspond. Pourquoi ? Parce que l'angle 2 vaut 60° et je vais le démontrer.

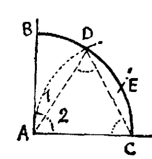


Fig. 158. Trisection de l'angle droit.

En effet, par construction, le triangle ADC est équilatéral ; donc ses angles valent 60°. Ainsi, 2 = 60° et 1 = 30°.

Si maintenant je reprends mon compas et si je trace encore le même arc, celui qui m'a déjà servi, en partant de B comme centre cette fois, j'aurai le point E et l'arc EC aura aussi 30°.

151. Voilà le seul cas où l'on peut opérer une trisection. Pour tous les angles autres que 90°, il faut tâtonner ou se servir d'un rapporteur en faisant la division de l'angle par 3. Si j'ai par exemple un angle de 42° à diviser par 3 je prendrai le 1/3 de 42 = 14°. Mais si j'ai 43° j'aurai pour le 1/3 un nombre non exact 14° + une fraction, et le moyen géométrique n existe pas.

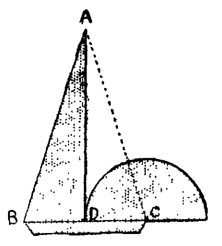


Fig. 159. — Appareil servant à diviser les angles en trois parties égales.

Mais on a trouvé un *procédé mécanique* qui repose sur la géométrie ; c'est à ce dernier titre que je vais vous l'apprendre. Au surplus, il est trop curieux pour qu'on puisse l'ignorer (v. fig. 159).

Sur un bristol suffisamment rigide, tracez un triangle isocèle ABC. Du point C décrivez une demi-circonférence ayant pour rayon la moitié de la base, soit DC. Découpez suivant le trait plein sur la figure en ayant soin de laisser dans le bas une languette qui maintiendra la demi-circonférence tangente à AD en D. La

hauteur doit être plus ou moins longue suivant les angles à mesurer.

Soit maintenant à diviser en trois l'angle O (fig. 159). Je transporte sur cet angle tout l'appareil de manière :

1° que DA passe toujours par le sommet O ;

2° que B soit sur le côté OB ;

3° que la demi-circonférence soit tangente au 2e côté OE.

Après un peu de tâtonnements on arrive à réaliser ces 3 conditions. On marque les points B, D et C ; ce sont les points de division de l'angle O, qui engendrent les angles 1, 2, 3.

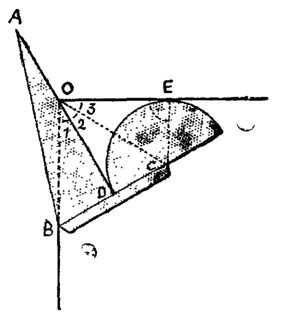


Fig. 160. — Manière de se servir de l'appareil.

Ces angles sont en effet égaux comme appartenant à des triangles rectangles égaux. OB et OC sont des hypothénuses égales (côtés du triangle isocèle BOC) et OD = OE comme tangentes issues d'un même point. La trisection est donc réalisée très facilement.

CINQUIÈME LEÇON

LIGNES PROPORTIONNELLES
ET FIGURES SEMBLABLES

Jusqu'à ce moment, si vous avez bien suivi l'enchaînement des propositions et compris les exercices, vous n'avez dû rencontrer aucune difficulté bien sérieuse ; un peu d'attention vous a suffi. Il n'en sera pas tout à fait de même pour l'étude que nous allons aborder. A chaque instant, nous serons obligés de recourir à des proportions et le lecteur fera bien de revoir à fond les pages de la VII[e] Leçon de l'*Algèbre*, ainsi que le mécanisme des *règles de trois* dans notre *Arithmétique* (v. IV[e] Leçon).

Faute de posséder ces notions indispensables, celui qui étudiera ce chapitre fera des efforts absolument vains et inutiles.

Détermination de rapports par les parallèles.

152. Nous avons démontré au n° 80 que si dans un triangle nous menons par le milieu d'un côté a une parallèle c' à la base c, cette parallèle divisera le côté opposé b en deux parties égales. Ainsi a' étant la moitié de a, b' sera la moitié de b, et nous avons vu qu'en même temps c' était la moitié de c (fig. 161).

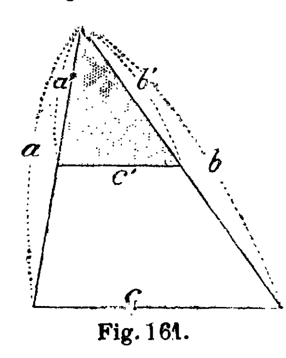


Fig. 161.

Considérant le petit triangle ombré dans la figure 161, nous pourrons donc dire que tous ses côtés sont deux fois plus petits que les côtés du grand triangle. Si donc

nous avons : petit triangle $\begin{cases} a' = 5 \\ b' = 4 \\ c' = 3 \end{cases}$

nous aurons : grand triangle $\begin{cases} a = 10 \\ b = 8 \\ c = 6 \end{cases}$

Nous pourrons donc écrire :

$$\frac{a'}{a} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{b'}{b} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{c'}{c} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, nous avons, entre les côtés, toujours *même rapport* qui est 1/2. Or, une suite des rapports égaux forme des proportions et nous pouvons conclure, par exemple, que

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \left(\text{puisque chacun des termes} = \frac{1}{2}\right).$$

Nous aurons également p our la même raison :

$$\frac{a'}{a} = \frac{c'}{c};$$

ou, pour tout résumer ·

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{1}{2}.$$

Or, ce résultat, qui montre qu'il existe un rapport toujours le même entre les côtés pris deux à deux, grâce à la parallèle à la base c, ce résultat, dis-je, n'est pas particulier à cette valeur de 1/2 et nous allons voir comment nous pouvons passer de ce cas particulier à un autre plus général.

En d'autres termes, si nous menons une parallèle à base d'un triangle, non plus au milieu d'un côté, mais en un point quelconque, cette parallèle déterminera encore des rapports et des proportions entre les côtés des deux triangles obtenus. Evidemment, ces rapports ne seront pas égaux à 1/2, mais à une autre valeur variable suivant le cas envisagé.

153. Cas général. — Portons sur une droite BC (fig. 162) une même unité de longueur 5 fois de suite,

puis formons un triangle quelconque ABC et, par les points de division de BC, menons des parallèles à la base. Ces parallèles nous donnent sur CA, 5 divisions également ; mais ce qu'il y a de plus intéressant à retenir, c'est que ces divisions sont aussi *égales entre elles*.

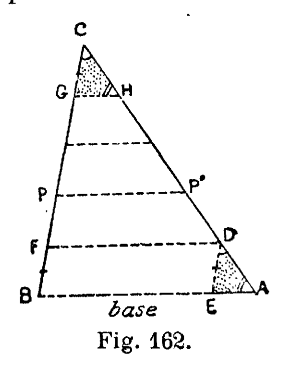


Fig. 162.

Nous le démontrerons facilement en menant DE parallèle à BC. Les triangles ombrés sont égaux : DE = FB (parallèles entre parallèles) mais CG = BF par construction, donc DE = CG ; tous les angles des deux petits triangles sont égaux 2 à 2 en raison des parallèles. Ainsi DA = CH. Le même raisonnement vaudrait pour n'importe quelle partie de AC.

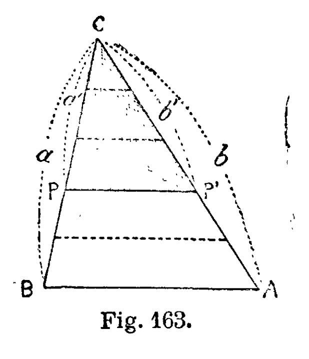


Fig. 163.

Donc, *si les parties de* BC *sont égales entre elles, les parties du côté opposé seront aussi égales entre elles, grâce aux parallèles.*

Nous allons maintenant reprendre la même figure, mais nous ne considérerons que la 3ᵉ parallèle à partir

du sommet. celle qui est marquée PP′ (v. la figure 163). Mettons des petites lettres pour simplifier le langage.

Si je compare a' avec a leur rapport est de 3 à 5 ou 3/5, ce qui s'écrit ainsi :

$$\frac{a'}{a} = \frac{3}{5}.$$

J'aurai de même pour b' et b le rapport de 3/5 ou

$$\frac{b'}{b} = \frac{3}{5}.$$

Ces rapports ayant même valeur (3/5) sont évidemment égaux entre eux et nous aurons :

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}.$$

Et nous voilà revenus à la même proportion qu'au numéro précédent, mais, cette fois, la valeur du rapport a changé, elle est de 3/5 au lieu de 1/2.

Vous voyez bien que le théorème devient général ; le cas de la parallèle tirée par le milieu d'un côté n'était qu'un cas tout particulier.

154. L'assimilation peut être poussée plus loin et nous allons voir que si les côtés a' et a, b' et b sont dans le rapport de 3 à 5, il en sera de même pour les *troisièmes côtés*, pour les bases, c' et c, ou si vous voulez, nous aurons encore

$$\frac{c'}{c} = \frac{3}{5}.$$

Reprenons toujours la même figure, en enlevant toutefois les parallèles qui ont servi à la première démonstration afin d'obtenir une figure « moins embrouillée » (fig. 164).

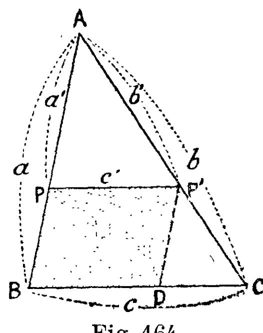


Fig. 164.

Nous savons que

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \text{ ou } \frac{3}{5};$$

et il faut démontrer qu'on a également

$$\frac{c'}{c} = \frac{3}{5}.$$

Par le point P′, menons une parallèle (P′D) au côté BA. Nous venons de construire un parallélogramme (ombré). Donc $BD = c'$ et peut le remplacer ; d'autre part, je sais que

$$\frac{b'}{b} = \frac{3}{5}.$$

Mais si je considère P′D en tant que parallèle à BA (pris comme base pour l'instant) je vois, d'après le nº 153, que si b' et b sont divisés dans le rapport de 3 à 5, la parallèle P′D déterminera sur le côté opposé un même rapport et je pourrai écrire

$$\frac{BD}{c} = \frac{3}{5};$$

ou, en remplaçant BD par c' qui lui est égal

$$\frac{c'}{c} = \frac{3}{5};$$

et c'est bien ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi nous écrirons la suite des rapports égaux à 3/5 et nous aurons :

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c},$$

ce qui est vrai quel que soit le rapport déterminé par la parallèle.

Les triangles semblables.

155. Constatons aussi en passant que le petit triangle ayant pour côtés a', b', c', a ses trois angles égaux respectivement aux trois angles du grand triangle. En effet, A est commun aux deux et les angles P′ = C et P = B sont correspondants deux à deux (fig. 164).

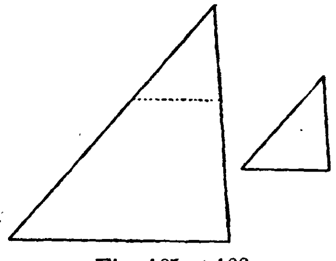


Fig. 165 et 166.

Ainsi, nos deux triangles ont non seulement leurs côtés proportionnels chacun à chacun, mais leurs angles égaux deux à deux.

Lorsque désormais nous trouverons des triangles réunissant ces deux sortes de propriétés nous dirons qu'ils sont *semblables*.

Prenez en effet un calque du petit triangle et mettez-le à côté du plus grand (fig. 165 et 166), vous serez immédiatement frappés par leur ressemblance. Le

second est la réduction du premier, ou si vous préférez, le premier est l'agrandissement du plus petit. Avec les appareils photographiques dont vous vous servez, vous ne faites au fond que des figures semblables : l'image d'un monument sur un de vos clichés est semblable au monument lui-même ; c'est là d'ailleurs le principe et le but du dessin et lorsqu'un peintre fait votre portrait, son ambition doit être avant tout de tracer de vous une figure semblable à la vôtre.

— Nous connaissons tout cela depuis longtemps, direz-vous. — Je veux bien l'espérer pour votre honneur, mais n'empêche que la Géométrie vient ajouter à ces notions vagues et confuses, en précisant les conditions requises pour que deux figures soient semblables.

Ces conditions, nous venons en effet de les fixer pour les triangles, mais nous pouvons les étendre à d'autres surfaces, à des polygones quelconques et nous dirons : *pour qu'il y ait similitude entre deux polygones, il faut que tous leurs angles soient égaux deux à deux et que leurs côtés homologues soient proportionnels.*

Ne vous effrayez pas de ce nouveau terme : « homologue » veut simplement dire *semblablement placé* ; par exemple, les côtés adjacents à des angles égaux sont semblablement placés ; on les dit alors *homologues*.

D'après ces principes, il est clair que tous les carrés se ressemblent ; mais il n'en va plus de même des

rectangles ; ces derniers possèdent bien tous quatre angles droits, mais leurs dimensions ne sont pas toujours proportionnelles ; les rectangles peuvent en effet être plus ou moins allongés.

Tous les cercles rentrent aussi dans le cas des figures semblables, mais j'imagine que vous seriez quelque peu embarrassés pour démontrer une telle proposition ; patience, cela viendra en son temps.

Pour le moment donc, nous bornerons nos constatations aux triangles seulement.

Les cas de similitude des triangles.

156. Nous venons d'apprendre que deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont

leurs 3 angles égaux chacun à chacun,

leurs 3 côtés homologues proportionnels.

A s'en tenir à la lettre de cette proposition, nous serions donc astreints, pour constater la similitude de deux triangles, à prendre 6 mesures : trois pour les angles et trois pour les côtés. Eh bien, nous allons voir qu'en pratique, tout cela se simplifie.

Construisez en effet un petit triangle dont les 3 angles seront égaux à ceux d'un triangle plus grand (fig. 165 et 166). Ne tenez aucun compte des dimensions du triangle vous ayant servi de modèle. La base du grand a 20 mm., je suppose ; donnez à la base du petit une longeur quelconque, soit 12 mm. et partez

de là pour votre construction ; faites l'angle $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$. Maintenant découpez ce petit triangle $A'B'C'$; si vous avez la précaution de placer l'angle B', opposé à la petite base, sur son égal B opposé à la grande, les deux figures s'emboîteront et comme l'angle A' est égal à A, la petite base sera forcément parallèle à la grande, puisque A et A' deviendront correspondants, une fois les triangles superposés. De plus, vous aurez pour tous les côtés le même rapport $\frac{12}{20}$ (nº 152).

Concluons donc que deux triangles sont semblables dès lors qu'ils ont 3 angles égaux deux à deux, *sans considération des côtés*.

Vous pouvez même, après un instant de réflexion, ramener ces conditions à *deux* seulement, puisque 2 angles étant donnés, le 3e est déterminé par le fait même ; il est nécessairement le supplément de la somme des 2 premiers.

N'est-il pas superflu, en effet, de dire qu'un triangle possède 3 angles égaux respectivement à 30, 70 et 80°. Dès lors que nous disons qu'il possède 2 angles, l'un de 30°, l'autre de 70°, le 3e est connu : il égale $180 - (30 + 70) = 80°$.

157. Autre question pendant que nous y sommes ; supposez qu'on vous dise : voilà deux triangles, un

petit et un grand; ils ont un angle égal (A = A', mêmes figures) compris entre deux côtés proportionnels. Qu'allez-vous conclure ? Que ces deux triangles sont encore semblables. En raison de l'égalité des angles au sommet, ils s'emboîteront encore et comme les côtés adjacents sont proportionnels, il s'en suit que les troisièmes côtés seront nécessairement parallèles et nous rentrons dans le cas général (n° 153).

158. On verrait finalement que la similitude serait toujours de rigueur si, ne connaissant aucun angle, nous étions sûrs que les 3 côtés sont proportionnels chacun à chacun, puisqu'alors nous sommes d'emblée dans les conditions exposées dans le théorème fondamental (n° 153).

Résumons ces trois cas de similitude :

159. 1° *Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont 2 angles égaux chacun à chacun (1er cas de similitude).*

Cette condition se réduit, dans les triangles rectangles, à 1 seul angle aigu égal, puisque la valeur du second angle aigu est connue par celle du premier : les angles aigus sont complémentaires (n° 57).

2° *Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels (2e cas de similitude).*

Si le triangle est rectangle et qu'il s'agisse des deux

côtés autres que l'hypothénuse, il est inutile de faire mention de l'angle, puisque l'*angle égal compris* est toujours droit.

3° Enfin ***ils sont semblables s'ils ont les 3 côtés proportionnels*** (3e cas de similitude).

160. Application. — Tout ce qui précède paraîtra peut-être difficile à retenir, mais quelques exemples vont donner à ces propositions un caractère de grande simplicité.

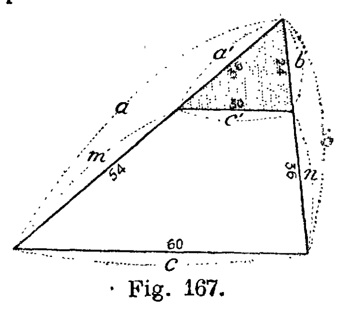


Fig. 167.

Soit un triangle dont deux des côtés ont : $a = 90$ unités de longueur, $b = 60$ (fig. 167).

A la distance $a' = 36$ du sommet C, je mène une parallèle à la base c ; on demande la longueur du segment b' déterminé par la parallèle sur le côté opposé.

Nous savons que le petit triangle (ombré) est semblable au grand, en raison de la parallèle. Nous écrirons donc (n° 153) :

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{46}{90} = \frac{b'}{60}.$$

Il suffit dès lors de trouver la valeur de b' dans la proportion (ou équation) précédente.

Nous aurons d'abord :

$$a'b = ab' \quad \text{ou} \quad 36 \times 60 = 90\, b'$$

d'où $$b' = \frac{a'b}{a} \quad \text{ou} \quad b' = \frac{36 \times 60}{90} = 24.$$

Au fond, le problème se ramène à la recherche d'une *quatrième proportionnelle*, c'est-à-dire à une simple *règle de trois*. (V. *Algèbre*, n° 153).

Ainsi, le segment cherché b' sera égal à 24 ; le segment restant n, s'obtiendra par une soustraction, puisque

$$n = b - b' \quad \text{ou} \quad n = 60 - 24 = 36.$$

Remarquons qu'on aurait pu trouver 36 par un autre procédé et directement, car m et n (v. sur la figure) sont dans le même rapport que a' et b' ; nous verrons bientôt pourquoi.

Or $m = 90 - 36 = 54$; nous écrirons donc immédiatement :

$$\frac{a'}{b'} = \frac{m}{n} \quad \text{ou} \quad \frac{a'}{m} = \frac{b'}{n} \text{ (1)}$$

et $$\frac{36}{24} = \frac{54}{n} \quad \text{ou} \quad \frac{36}{54} = \frac{24}{n}.$$

Ces deux proportions nous donnent :

$$a'n = b'm \quad \text{ou} \quad 36\,n = 54 \times 24$$

et $$n = \frac{b'm}{a'} \quad \text{ou} \quad n = \frac{54 \times 24}{36} = 36.$$

Ce résultat tient aux propriétés qu'ont les proportions de se prêter à des combinaisons variées.

---

(1) Cela provient de ce que $a'n = b'm$ (v. Algèbre, n° 153).

Partons en effet de la proportion suivante déjà démontrée :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

dans laquelle $a = a' + m$ et $b = b' + n$; remplaçons-y a et b par leur valeurs respectives, nous aurons :

$$\frac{a' + m}{a'} = \frac{b' + n}{b'}$$

qui peut s'écrire (v. nº 166 *Algèbre*), d'après une règle connue :

$$\frac{m}{a'} = \frac{n}{b'} \qquad \text{ou} \qquad \frac{a'}{b'} = \frac{m}{n},$$

qui est bien la proportion déjà posée pour trouver directement la valeur de n.

Remarquons enfin que, dans le triangle donné, il n'a pas été question de l'angle C au sommet ; cela indique que ces résultats sont vrais et se vérifient quelle que soit l'ouverture de cet angle ; ou, ce qui revient au même, quelle que soit la grandeur de la base c' du petit triangle ; mais si celle-ci vous est donnée, la base c sera déterminé par le fait même. Nous écrirons en effet, par la considération des côtés homologues dans le petit et le grand triangle (c' étant supposé égal à 30) :

$$\frac{a'}{c'} = \frac{a}{c} \qquad \text{ou} \qquad \frac{36}{30} = \frac{90}{c}$$

ou :

$$c = \frac{ac'}{a'} \qquad \text{ou} \qquad c = \frac{90 \times 30}{36} = 75.$$

Maintenant considérons de nouveau le petit et le grand triangle et établissons le rapport de leurs côtés respectifs, nous aurons :

$$\frac{a'}{a} = \frac{36}{90} \text{ ou en simplifiant } = \frac{2}{5}$$
$$\frac{b'}{b} = \frac{24}{60} \quad — \quad = \frac{2}{5}$$
$$\frac{c'}{c} = \frac{30}{75} \quad — \quad = \frac{2}{5}.$$

161. Ainsi les rapports sont bien les mêmes ; ils ont un valeur constante : $\frac{2}{5}$; cette valeur constante s'appelle *rapport de similitude* et celui-ci est toujours donné par la série obtenue au moyen des côtés homologues :

$$\frac{36}{90} = \frac{24}{60} = \frac{30}{75} = \frac{2}{5};$$

ou d'une façon plus générale

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c}{c'} = k \text{ (constante).}$$

Le Pantographe.

162. Reposons-nous un peu de tous ces calculs en construisant un appareil qui s'appuie sur les principes précédemment développés et qui permet de dessiner mécaniquement des figures semblables. Nous allons d'abord le réaliser en carton pour une démonstration sommaire ; ensuite et à loisir vous pourrez le bâtir plus solidement en bois. Dans un bristol fort. ou

mieux dans un vieux calendrier. découpez des bandes étroites que vous rassemblerez suivant le dessin ci-contre (fig. 168) A'D'AB est un parallélogramme arti-

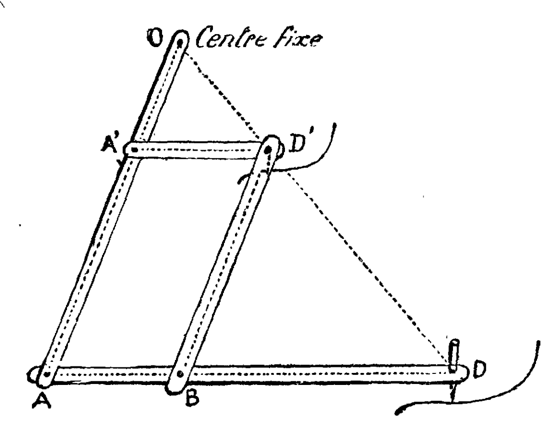


Fig. 168. — Pantographe, appareil destiné à tracer des figures semblables.

culé, c'est-à-dire pouvant se déformer à volonté ; mais les deux branches AA' et AB sont prolongées l'une en O, l'autre en D. La condition nécessaire est que dans une position arbitrairement choisie, OD'D soient en ligne droite ; il est facile de voir qu'une fois obtenue, cette condition se réalisera d'elle-même quelles que soient les déformations du parallélogramme.

En effet, fixez l'extrémité O par une épingle sur une planchette ; tout déplacement imprimé à D' sera amplifié par l'extrémité D. Mais quelle que soit la

position de D', AB restera parallèle à A'D' puisque nous déformons un parallélogramme. Nous aurons donc toujours un grand triangle OAD dont la base sera parallèle à celle du petit triangle OA'D' et les deux triangles seront semblables dans toutes les positions ; donc le *rapport de similitude* des deux triangles sera toujours égal à celui de $\frac{OD'}{OD} = \frac{OA'}{OA} = k$ (constante).

Si une pointe marquant D' se déplace suivant une figure donnée, un crayon placé en D reproduira nécessairement une figure semblable.

C'est cet appareil dont se servent les dessinateurs sous le nom de pantographe (qui dessine tout). Son invention est due à de Marolais (1615), mais il fut perfectionné par le Père Scheiner, astronome de l'époque. Depuis, on en a fait un instrument de précision ; des roulettes fixées au-dessous des points d'articulation suppriment les frottements. D peut porter, soit un crayon, soit une plume à tracer ; enfin des curseurs portant la pointe D et le crayon D', peuvent se déplacer, glisser sur leurs branches tout en restant en ligne droite par rapport au sommet O, et permettre de faire varier le rapport de similitude, ce qui revient à dire qu'on peut agrandir 2, 3, 4 fois une figure à volonté.

Sous différents noms, le pantographe trouve son application dans un grand nombre d'industries : les fabricants d'horlogerie l'emploient à la fabrication des

rouages minuscules, à la gravure des lettres microscopiques ; les usines de tissus, à la confection de broderies et de dessins, etc. ; il n'est pas jusqu'aux sculpteurs qui n'aient trouvé le moyen de se servir de cet instrument convenablement modifié, pour réduire des motifs en relief et même des statues.

Le compas de réduction.

163. Un autre instrument beaucoup plus simple et qui repose également sur ce même principe des triangles semblables, est le *compas de réduction*. Prenez encore deux bandes de papier fort, dont vous terminerez les extrémités par un angle très aigu (pour servir de pointe). Soit maintenant à réduire une grandeur *au tiers*. Divisez vos deux bandes, suivant leur longueur, en 4 parties égales par des traits marqués au crayon. Croisez vos bandes au quart de leur longueur par une épingle plantée en O (v. fig. 169) ; vous aurez un compas à 4 branches.

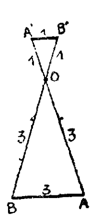


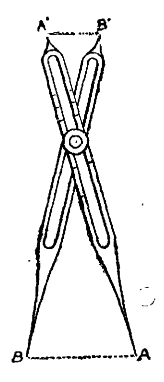
Fig. 169.

Les triangles AOB, A'OB' sont isocèles et semblables. Donc, si le rapport de similitude est de 1/3 pour les côtés, il sera également de 1 sur 3 pour les bases. En d'autres termes vous aurez :

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{1}{3} \text{ donc aussi } \frac{A'B'}{BA} = \frac{1}{3}$$

Ainsi, vous obtiendrez automatiquement A'B' qui sera bien le *tiers* de AB.

Si maintenant vous tracez des divisions très rapprochées sur les deux branches, en faisant varier le point O d'intersection, vous pourrez à volonté obtenir le genre de réduction que vous désirez : 1/4, 1/5, 1/7, etc. C'est ce qui a été réalisé dans le compas de réduction qu'on trouve dans le commerce, au moyen d'un centre O agencé de manière à coulisser sur les deux branches (fig. 170).



g. 170. Compas de réduction

Au point de vue purement théorique, la considération des triangles semblables a donné lieu à une foule de déductions ; elle a servi à découvrir des quantités de relations intéressantes dans les figures. Notre programme est trop restreint pour que nous puissions même les énumérer ; nous nous contenterons donc de signaler les principales.

La puissance d'un point par rapport à un cercle.

164. L'une de ces relations et non la moins curieuse, se présente dans le cercle.

Considérons 2 cordes qui se coupent (fig. 171) en un point M. Nous avons ainsi 4 segments ; mesurons-les

et supposons que nous ayons trouvé pour les trois premiers des nombres ainsi répartis :

1re *corde* AB dont les segments sont $\begin{cases} MA = 3 \text{ m.} \\ MB = 10 \text{ m.} \end{cases}$

2e *corde* CD — $\begin{cases} MD = 5 \text{ m.} \\ MC = x. \end{cases}$

MC n'est pas connu et je l'appelle x ; quelle est sa longueur ? Eh bien, pour la trouver, il suffit d'écrire :

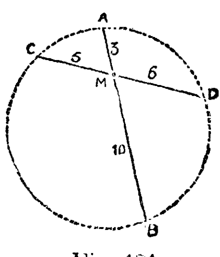


Fig. 171.

Produit des deux segments de la 1re corde = produit des 2 segments de la 2e.

ou

$$MA \times MB = MD \times MC$$

ou

$$3 \times 10 = 5 \times x.$$

On le voit, le problème se réduit à une *règle de trois* ou à une simple équation du premier degré, puisqu'on pourra écrire

$$5x = 3 \times 10$$

$$x = \frac{3 \times 10}{5} = \frac{30}{5} = 6.$$

Ainsi, le segment cherché aura 6 m. exactement. Voilà ce que nous pouvons vérifier directectement dans un cercle quelconque à propos *d'un point M intérieur ; les produits des segments des cordes passant*

par ce point sont toujours égaux entre eux. Mais cela reste à démontrer par des procédés géométriques : or, rien n'est plus simple, si l'on a recours aux triangles semblables.

Considérez en effet les triangles ombrés dans la figure 172 (analogue à la figure précédente) où nous avons réuni simplement les extrémités de chaque corde ; ces triangles sont semblables, car ils ont leurs angles égaux deux à deux.

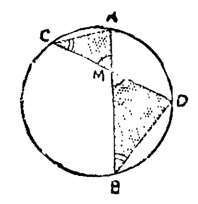


Fig. 172.

Les angles en M sont opposés par le sommet ; angle A = D, car tous deux sont inscrits et ont pour mesure 1/2 arc CB ; C = B pour une raison analogue. Nous pourrons donc écrire :

$$\frac{\text{MA (opposé à C)}}{\text{MD (opposé à B)}} = \frac{\text{MC (opposé à A)}}{\text{MB (opposé à D)}}.$$

Réduisant au même dénominateur, il vient :

$$\text{MA} \times \text{MB} = \text{MD} \times \text{MC}$$

ou

$$3 \times 10 = 5 \times 6,$$

nombres de la figure précédente.

165. Ce résultat reste encore vrai si le point M est extérieur, mais cette fois les segments empiéteront l'un sur l'autre et nous considérerons la sécante entière

et sa partie extérieure, ou si l'on veut (fig. 173), les distances de M aux deux points où la sécante rencontrera la circonférence. Nous aurons alors :

1re sécante { 1er segment : sécante entière = MA ; 2e segment : partie extérieure = MA' ;

2e sécante { 1er segment : sécante entière = MB ; 2e segment : partie extérieure = MB'.

Or, les triangles MAB' et MBA' sont encore semblables : angle M est commun ; B = A (même mesure qui est 1/2 arc A'B'. On pourra donc écrire :

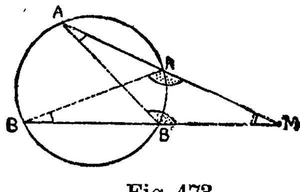


Fig. 173.

$$\frac{MA}{MB} = \frac{MB'}{MA'},$$

d'où

$$MA.MA' = MB.MB'$$

Maintenant, faisons tourner la sécante MB (fig. 174) nous aurons toujours pour deux positions quelconques

$$MB.MB' = MC.MC' = MD.MD' = \text{etc...} = k \text{ (const.)}$$

Ainsi, *le produit reste constant* ; mais dans ce mouvement, les cordes deviennent de plus en plus petites, et nous voyons que la valeur de la partie extérieure (MB', MC', MD') se rapproche sans cesse de la valeur de la sécante entière (MB, MC, MD).

Or la tangente peut fort bien être considérée comme la limite vers laquelle tend une sécante mobile (celle

qui tourne autour du point M) et dont les deux points d'intersection avec la circonférence, se rapprochent indéfiniment l'un de l'autre.

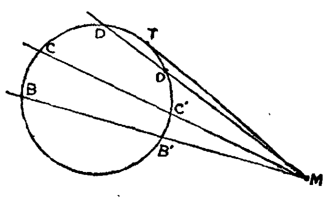


Fig. 174.

Si nous passons à la limite, nous retrouverons évidemment ce même produit constant : alors, sécante entière et partie extérieure se confondront et seront égales à la tangente ME. Nous aurons donc pour produit :

$$MT \times MT = \overline{MT}^2 ;$$

et nous pouvons écrire :

$$MB. MB' = \overline{MT}^2,$$

ce qui revient à dire que *la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure* (v. *Algèbre* n° 154 pour la définition de la moyenne proportionnelle).

166. Prenons des nombres comme application :

Soient $MB = 20$ et $MB' = 5$. Cherchons la longueur de la tangente MT issue de M. Nous aurons :

$$\overline{MT}^2 = 20 \times 5 = 100,$$

d'où

$$MT = \sqrt{100} = 10.$$

Revenons au premier cas ; il va nous offrir une rela-

tion analogue. Si nous faisons tourner une corde autour du point M, intérieur, le produit des segments, nous l'avons démontré, sera constant et toujours égal à une même valeur. Cette valeur est ce que l'on nomme *la puissance du point M par rapport au cercle* (même définition si M est extérieur).

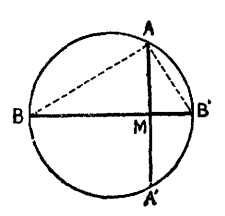


Fig. 175.

Envisageons le cas particulier où la première corde est un diamètre et traçons une autre corde mobile autour d'un point M pris sur cette corde. A un moment donné, la corde mobile sera perpendiculaire au diamètre (v. fig. 175) ; soit AA′ cette corde, nous aurons encore :

$$MB.MB' = MA.MA' = \overline{MA}^2 \text{ (moy. proportion.)}$$

car AA′ est alors partagé en deux moitiés (nº 125).

De plus, le triangle BAB′ est rectangle en A, comme inscrit dans une 1/2 circonférence (nº 133) et AM est sa hauteur. Nous pourrons donc conclure que *dans un triangle rectangle la hauteur (AM) est moyenne proportionnelle entre les deux segments (MB, MB′) qu'elle détermine sur l'hypothénuse (BB′)*, puisqu'on aura toujours

$$\overline{MA}^2 = MB.MB'.$$

L'étude plus approfondie des triangles rectangles au numéro suivant, nous conduira au même résultat.

Relations importantes entre les éléments d'un triangle rectangle.

167. Soit le triangle ABC rectangle en A.(fig. 173). Adoptons des petites lettres pour simplifier et posons :

Hypothénuse = BC = a,

Grand côté de l'angle droit = AB = c,

Petit côté de l'angle droit = AC = b.

Décalquons ce triangle sur une autre feuille et découpons-le suivant la hauteur AD = h. Nous aurons ainsi 3 triangles rectangles: le premier (1) qui sera le triangle primitif (fig. 176). et deux autres, un moyen et un petit que nous numéroterons 2 et 3. Disposons-les ainsi (fig. 177) en retournant 2 et 3.

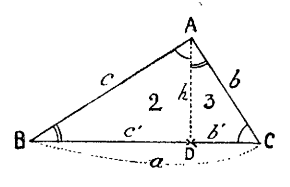


Fig. 176.

Nous voyons qu'ils sont semblables, mais nous pouvons le démontrer aisément. Nous avons vu (n° 72) que la hauteur déter-

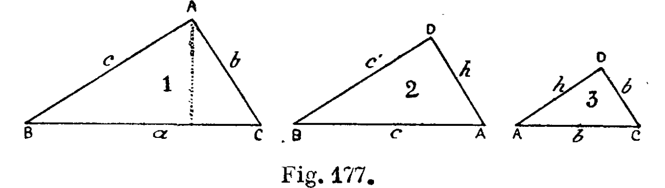


Fig. 177.

mine toujours deux triangles rectangles ayant des angles aigus égaux ; en effet

Angle A du triangle 3 = B du triangle 2 et B est commun avec B du triangle 1. Ainsi, nos trois triangles sont semblables parce que, rectangles, ils ont un angle aigu égal. Nous allons donc pouvoir établir entre eux des relations de similitude.

Comparons tout d'abord le grand triangle 1 avec le triangle 2, ou triangle ABC avec triangle ABD, nous aurons :

$$\frac{c \text{ (hypoth. de 2)}}{a \text{ (hypoth. de 1)}} = \frac{c' \text{ (grand côté de 2)}}{c \text{ (grand côté de 1)}}$$

d'où

$$c \times c = a \times c' \quad \text{ou} \quad c^2 = ac'.$$

On aurait de même en comparant les triangles 1 et 3 (ABC et ADC).

$$b^2 = ab'.$$

D'où cette conclusion : *dans un triangle rectangle un côté de l'angle droit (c ou b) est moyen proportionnel entre l'hypothénuse entière (a) et sa projection sur l'hypothénuse (c' ou b').* (La projection du côté c sur l'hypothénuse est c', celle de b est b'. On dit aussi que c' et b' sont les segments de l'hypothénuse déterminés par la hauteur).

Comparons maintenant les triangles partiels 2 et 3; nous aurons entre les côtés homologues la relation

$$\frac{h}{c'} = \frac{b'}{h},$$

d'où l'on tire

$$h^2 = c'b'.$$

Ce qui veut dire que la hauteur dans un triangle rectangle est moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur l'hypothénuse, proposition déjà obtenue par un autre raisonnement (n° 166) où nous avions considéré des cordes se coupant à l'intérieur du cercle au point M.

168. Mais voici une conséquence autrement curieuse et à laquelle nous conduit directement l'Algèbre.

Additionnons membre à membre les deux dernières relations, nous aurons :

$$b^2 = ab'$$
$$c^2 = ac'$$

$$\text{Total : } b^2 + c^2 = ab' + ac'$$

Mettons a en facteur commun dans le 2e membre (v. *Algèbre* n° 64), il viendra

$$b^2 + c^2 = a\ (b' + c');$$

mais $b' + c' = a$ qui est précisément l'hypothénuse ; la dernière équation se ramènera donc à celle-ci qui lui est équivalente

$$b^2 + c^2 = a \times a \text{ ou } a^2;$$

Ce qu'on écrit généralement ainsi :

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Traduisons et nous voyons que *la carré de l'hypothénuse égale la somme des carrés des deux autres côtés.*

Ce théorème l'un des plus importants peut-être de

toute la Géométrie a été trouvé et démontré par Pythagore qui vivait au VI[e] siècle avant Jésus-Christ. Ce philosophe, fameux par ses découvertes mathématiques, avrit passé vingt-sept années en Egypte au milieu des prêtres et des savants ; il avait été ainsi initié à une science très avancée dont il voulut dans la suite faire bénéficier ses compatriotes. Quelques auteurs pensent que lors de la conquête de l'Egypte par Cambyse, Pythagore aurait été emmené à Babylone où il apprit encore la science des Chaldéens.

Quoi qu'il en soit, de retour dans sa patrie. le célèbre mathématicien développa son idée de combiner l'Arithmétique, ou science des nombres, avec la Géométrie et c'est ainsi qu'il trouva le beau théorème dont nous avons donné l'énoncé, théorème qui, depuis, a gardé son nom.

Cette découverte, disent ses historiens, l'avait tellement enthousiasmé qu'il voulut la célébrer en offrant aux dieux un magnifique sacrifice.

169. Par quelles considérations Pythagore en arriva-t-il à énoncer cette proposition, personne ne l'a jamais su, mais il est probable que sa première démonstration reposait sur la considération des triangles rectangles isocèles.

Soit en effet un triangle isocèle rectangle en A (fig. 178 ;) je dis que le carré construit sur l'hypothé-

nuse BC égale en surface la somme des petits carrés construits sur les deux autres côtés. Oh ! la démonstration est la plus simple qui existe : Rabattez le grand carré au-dessus de BC comme charnière, vous

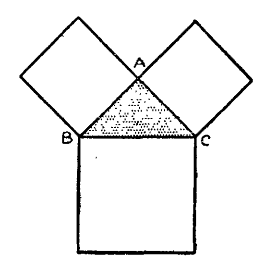


Fig. 178.

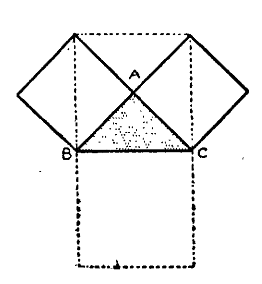


Fig. 178 *bis*.

avez la figure 178 *bis* ; et vous voyez immédiatement que le grand carré contient 4 petits triangles égaux entre eux (en raison des diagonales) tandis que les petits carrés n'en contiennent que 2 chacun : mais ceci est un cas très particulier.

170. Plus tard, Pythagore considéra, dit-on, le triangle rectangle dont l'hypothénuse égale 5 avec des côtés de 4 et de 3 de longueur. Dans ces conditions, la démonstration n'est guère plus compliquée que la précédente.

On voit en effet qu'en divisant les trois carrés cons-

truits sur les trois côtés en petits carrés égaux à la *surface-unité*, le plus grand en contient 25, alors que les

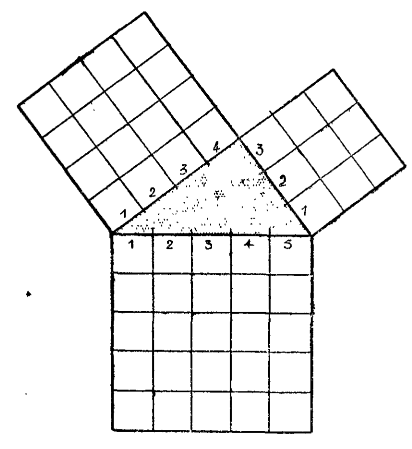


Fig. 179.

deux autres en contiennent respectivement 16 et 9 (fig. 179).

Mais

$$25 = 16 + 9,$$

ou

$$5^2 = 4^2 + 3^2,$$

égalité qui démontre encore le théorème.

171. Malheureusement, nous sommes encore là en face d'un cas spécial, car il est évident que tous les

triangles rectangles ne possèdent pas des côtés ayant comme longueur 5, 4 et 3 ou des multiples de ces nombres. Il fallait donc imaginer une autre méthode pour démontrer que la proposition est vraie dans tous les cas.

Cette méthode, vous la trouverez dans tous les Traités de Géométrie édités depuis Euclide et comme elle est loin d'être simple, qu'au surplus, un grand nombre d'élèves — je ne parle que de ceux d'autrefois — n'avaient pas assez d'esprit, paraît-il, pour la saisir facilement, le fameux théorème du carré de l'hypothénuse fut décoré dans les écoles du nom irrévérencieux de *Pont aux ânes* ; on insinuait par là que seuls les gens d'esprit parvenaient à franchir ce pont périlleux.

La démonstration attribuée à Euclide repose sur le procédé suivant : si l'on prolonge la hauteur du triangle rectangle, on divise le grand carré en deux rectangles 1 et 2, inégaux généralement et l'on démontre que la surface du rectangle 1 est équivalente à celle du carré 1 correspondant, tandis que celle du rectangle 2 équivaut de même à celle du carré 2. On a donc finalement :

Grand carré composé des rectangles 1 et 2 = carré 1 + carré 2.

Ce que nous avons appris suffirait amplement pour comprendre le genre de démonstration généralement employé, mais je préfère vous en donner une autre

aussi rigoureuse et qui ne vous demandera aucun effort d'attention.

Prenons un triangle rectangle dont les côtés soient b et c, a étant l'hypothénuse. Découpez maintenant dans une feuille de papier teinté (de couleur bleue, je suppose), 8 autres triangles rectangles égaux au premier.

D'autre part, vous allez découper dans une feuille de papier blanc deux grands carrés identiques, en ayant soin de donner aux côtés une longueur égale à la

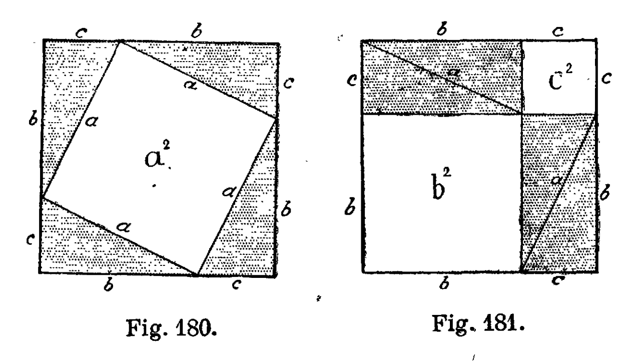


Fig. 180. Fig. 181.

somme des côtés de l'angle droit de vos triangles rectangles bleus. Ainsi le côté de votre grand carré que nous appellerons C sera égal à $b + c$.

N'est-il pas évident que, quelle que soit la façon dont vous disposerez 4 triangles bleus, à l'intérieur de vos deux carrés, la surface blanche restante sera toujours la même comme étendue, puisque de chacun des

carrés qui sont égaux vous aurez enlevé 4 fois la surface d'un même triangle ?

Maintenant, disposez-les comme dans les figures 180 et 181 et vous aurez bien

Carré blanc de gauche = somme des carrés blancs de droite.

Or, le carré blanc de gauche n'est autre que le carré construit sur l'hypothénuse de votre triangle rectangle tandis que les carrés blancs de droite sont les carrés construits sur les deux autres côtés du même triangle.

Il resterait, pensez-vous, à montrer que la surface blanche intérieure de gauche, est un carré, mais ceci est une chose acquise depuis longtemps ; nous avons eu soin de le démontrer dans l'exercice du n° 105.

Voilà donc une démonstration très simple du *Pont aux ânes* et m'est avis qu'il faudrait porter un bât sérieux pour ne pas saisir immédiatement.

172. Application. Le théorème de Pythagore se prête à une foule d'applications d'ordre pratique ; nous le rencontrons à chaque pas dans toutes les industries, dans toutes les professions, dans toutes les sciences. Un problème simple fera comprendre son utilité.

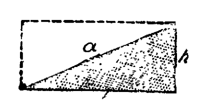


Fig. 182.

On donne un terrain rectangulaire ayant 75 m des

base et 40 m. de hauteur ; calculer, sans la mesurer, la longueur de sa diagonale (fig. 182).

Cette diagonale est l'hypothénuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit, la base et la hauteur du rectangle donné (fig. 182).

On écrira donc, a étant l'hypothénuse, b la base et h la hauteur :

$$a^2 = b^2 + h^2$$

ou, dans le cas considéré :

$$a^2 = 75^2 = 40^2 \text{ ou } a^2 = 5625 + 1600 = 7225 \text{ m}^2 ;$$

donc

$$a = \sqrt{7225} = 85 \text{ m}^2.$$

Si l'on vous avait donné, dans le rectangle précédent, la diagonale et la base, la hauteur deviendrait l'inconnue et l'on écrirait encore :

$$a^2 = b^2 + h^2,$$

d'où

$$h^2 = a^2 - b^2 \quad \text{ou} \quad h^2 = 7225 - 5625 = 1600 ;$$

donc

$$h = \sqrt{1600} = 40 \text{ m}.$$

Les nombres incommensurables — Diagonale d'un carré.

173. Nous pouvons appliquer la méthode précédente à la recherche de la diagonale d'un carré dont le côté est donné.

Soit un carré de 1 mètre de côté ; calculer sa diagonale (fig. 183).

Nous écrirons, en appelant d cette diagonale et c le côté :

$$d^2 = c^2 + c^2 \quad \text{ou} \quad d^2 = 1^2 + 1^2 ;$$

d'où

$$d^2 = 2 \quad \text{et} \quad d = \sqrt{2} = 1{,}414.....$$

Mais la racine carrée de 2 n'est pas un nombre entier ; aussi loin que vous poussiez votre opération, vous trouverez toujours des décimales sans pouvoir arriver à un nombre exact.

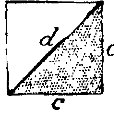


Fig. 183.

Peut-être, penserez-vous, cela est-il particulier au carré ayant l'unité de longueur comme côté ; si telle était votre opinion à ce sujet, vous seriez dans l'erreur la plus complète et je vais vous le démontrer.

De toutes façons, c étant le côté, nous venons de voir qu'on aura toujours :

$$d^2 = c^2 + c^2 ;$$

donc

$$d^2 = 2\,c^2 \quad \text{ou} \quad d = \sqrt{2c^2}.$$

Mais l'Algèbre m'a enseigné que je puis transformer cette dernière équation en celle-ci qui lui est équivalente :

$$d = \sqrt{2} \times \sqrt{c^2} \text{ ou } \sqrt{2} \times c.$$

Ainsi, quelle que soit la valeur de c, j'aurai toujours

$$d = c.\sqrt{2};$$

ce qui veut dire que, finalement, j'en serai toujours réduit pour calculer la diagonale à multiplier le côté par la racine carrée de 2 ; et comme je ne pourrai jamais trouver une valeur exacte de cette racine, il faut en conclure qu'il ***n'existe pas de grandeur commune pouvant servir à la fois à mesurer le côté du carré et sa diagonale.***

Etrange constatation ! Il existe donc des grandeurs bien réelles et qui ne sauraient être mesurées avec la même unité : les géomètres appellent ces sortes de grandeurs *incommensurables*, sous-entendu entre elles.

J'insiste sur ce point, car beaucoup de personnes qui entendent prononcer devant elles, l'expression *incommensurable* ne la comprennent pas généralement dans le sens qu'elle doit avoir en Mathématiques.

Le mot incommensurable signifie, en effet, dans le langage ordinaire, qui ne peut être mesuré, au delà de toute mesure, c'est ainsi que l'on dit volontiers en parlant de l'éloignement de certaines étoiles qu'elles sont à des distances incommensurables, mais dès que nous nous plaçons sur le terrain purement géométrique le mot incommensurable veut dire tout autre chose : il est toujours relatif et l'on dit incommensurable *par rapport* à une autre grandeur, qui n'a pas de *commune mesure* avec cette dernière.

Par convention, on dit aussi qu'un nombre est incommensurable comme la racine carrée de 2 $(\sqrt{2})$ par exemple, parce que l'on sous-entend *par rapport à l'unité.*

Cette notion est très importante; elle revient souvent en Géométrie et nous la retrouverons bientôt, lorsque nous chercherons le rapport de la circonférence au diamètre.

Rapport des surfaces dans les polygones.

174. Nous avons vu au n° 118 que si l'on mène, par les sommets d'un triangle, des parallèles aux trois côtés, on obtient un nouveau triangle qui a des côtés doubles de ceux du premier; en même temps, nous avons constaté que le grand triangle est 4 fois plus grand en surface que le triangle primitif.

On démontrerait facilement, qu'en raison des parallèles, le grand triangle est semblable au petit, car ils ont tous les deux des angles égaux chacun à chacun.

Nous pouvons donc conclure que *les surfaces sont entre elles comme le carré de leurs dimensions.*

Dimensions 2 fois plus grandes : surface $2 \times 2 = 2^2$ $= 4$ fois plus grande;

Dimensions 3 fois plus grandes : surface $3 \times 3 = 3^2$ $= 9$ fois plus grande ;
et ainsi de suite.

Cette règle est applicable à tous les polygones semblables.

Pour le carré, la démonstration est évidente à l'aspect de la figure 184. Nous voyons en effet que le grand carré dont les côtés ont été doublés, contient 4 petits carrés égaux au premier. Même remarque pour des rectangles (v. fig. 185).

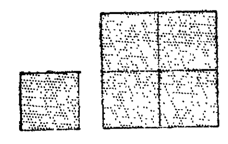


Fig. 184.

Si les polygones sont quelconques, nous arrivons à une conclusion identique mais auparavant il nous faut définir les polygones semblables.



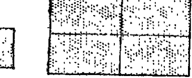


Fig. 185.

Soient les polygones figures 186 et 187. Je dirai *qu'ils sont semblables si je constate qu'ils ont leurs côtés homologues proportionnels et leurs angles*

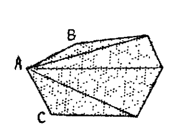


Fig. 186.

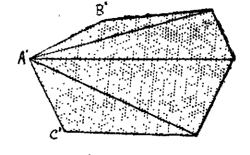


Fig. 187.

égaux chacun à chacun. Les côtés homologues, ici, seront les côtés des angles égaux : par exemple AB

et A'B', qui appartiennent aux angles A et A', sont homologues.

Il est facile de se rendre compte que dans le cas de polygones semblables, ceux-ci peuvent être décomposés en un même nombre de triangles semblables et semblablement placés et le rapport de similitude est le même pour les triangles partiels et pour le polygone qui n'est que la somme de leurs surfaces.

Ainsi, nous aurons dans les 2 polygones envisagés :

Rapport de similitude = rapport de deux côtés homologues.

ou

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = k \text{ (constante)}$$

$$\text{Rapport des surfaces} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C'}^2} = k^2$$

Ainsi, nous voyons que *le rapport des surfaces de deux polygones semblables égale le carré du rapport de deux côtés homologues ou,* ce qui revient au même, *le carré du rapport de similitude.*

EXERCICES ET APPLICATIONS

175. **Mener une parallèle à une droite donnée par un point donné extérieur.** Soit la droite AB et le point extérieur C. Pour mener par ce point une parallèle à AB, on peut s'appuyer sur le théorème connu (n° 46).

On abaissera de C la perpendiculaire à AB, puis en C, on élèvera une 2e perpendiculaire.

Mais il existe des méthodes plus expéditives : on joint C à AB par une droite quelconque faisant avec AB un angle quelconque 1 par exemple. On reproduit en C le même angle de l'autre côté de la droite, soit 2) : CE est parallèle à AB car 1 = 2 comme alternes-internes (fig. 188).

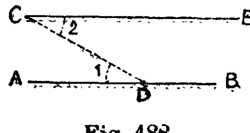


Fig. 188.

2° La distance entre les deux parallèles étant donnée avec une ouverture de compas égale à cette distance, on trace (fig. 189) à partir de AB deux moitiés de circonférence, en A et en B par exemple ; on mène CD tangentiellement aux deux arcs ainsi décrits. CD est parallèle à AB. En effet, ABCD est un parallélogramme rectangle.

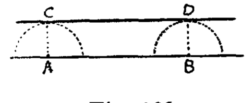
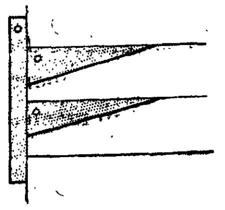


Fig. 189.


Fig. 190.

Une équerre glissant sur une règle fixe permet de résoudre ces problèmes et de tracer toutes les parallèles que l'on désire (fig. 190).

178. **Diviser une droite en parties égales.** Je veux diviser AB en 5 parties égales. Je prends une unité de

longueur arbitraire que je reporte 5 fois bout à bout sur une droite AX quelconque. A partir de A, je trace AB faisant un angle quelconque avec AX.

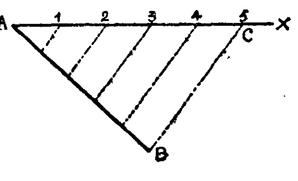


Fig. 191.

Je joins l'extrémité de la 5e division avec B, soit CB et je mène au moyen de l'équerre, par exemple, des parallèles à CB par les divisions de AC. Ces parallèles déterminent sur AB des segment égaux, d'après le théorème du n° 153.

177. Construire une quatrième proportionnelle. Soit la proportion

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{x} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{x};$$

on fait une construction analogue à la précédente. Sur AX je porte $a=2$ et $c=4$. Sur AY, je porte $b=3$. Je joins les extrémités de a et de b ; à l'extrémité de c, je mène une parallèle à la droite ainsi obtenue et j'ai le segment cherché sur AY. On a en effet des triangles semblables, d'où l'on tire la proportion précédente.

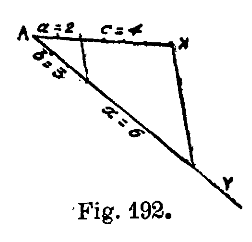


Fig. 192.

Ce procédé est souvent employé pour construire un rectangle semblable à un autre, ou pour trouver les dimensions d'un rectangle qu'on veut réduire par la photographie; enfin, c'est un moyen de trouver graphiquement la solution d'une règle de trois, puisqu'on peut toujours représenter les trois données du problème par des longueurs correspondant aux 3 nombres.

178. Construire une moyenne proportionnelle à deux grandeurs. Soit la proportion

$$\frac{2}{x} = \frac{x}{8} \quad \text{ou} \quad \frac{c'}{x} = \frac{x}{b'}$$

qui donne $x^2 = 2 \times 8$ ou $x^2 = c'b'$.

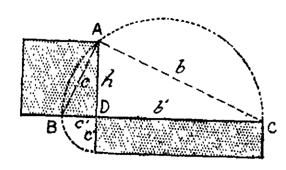


Fig. 193. — Le carré et le rectangle ombrés sont équivalents.

On s'appuie sur les théorèmes de nos 166 et 167, et avec la somme des *nombres extrêmes* de la proportion, qu'on considère comme *un diamètre*, on trace une 1/2 circonférence. A l'extrémité de c', élevons la perpendiculaire DA ; BAC étant un triangle rectangle (inscrit dans une 1/2 circonf.) (fig. 193),

h, sa hauteur, est moyenne proportionnelle entre c' et b';

car on a $\qquad h^2 = c'b'$

ou $\qquad h^2 = 2 \times 8 = 16$:

d'où $\qquad h$ ou $x = \sqrt{c'b'}$ et h ou $x = \sqrt{16} = 4$.

Ce procédé permet de construire un carré équivalent à un rectangle.

En effet, le carré qui a pour côté h, égale bien, *en surface*, le rectangle ayant b' pour base et c' pour hauteur.

Nous avons en outre, par cette méthode le moyen d'extraire graphiquement une racine carrée.

Soit à extraire la racine carrée de 16 ; je décompose ce carré en un produit de deux nombres (2 et 8) et je construis une moyenne proportionnelle à ces deux nombres.

179. Construire un triangle équivalent à un carré donné, la base du triangle étant imposée. — Soit c le côté du carré et d la base du triangle (fig. 194). Je prends a comme diamètre d'une 1/2 circonférence. A une extrémité de a (fig. 195) je mène la corde c. Elle est moyenne proportionnelle entre l'hypothénuse entière et sa projection sur l'hypothénuse (nº 167) on a donc, si $c = 4$ et $a = 8$:

Fig. 194.

$$\frac{c}{a} = \frac{c'}{c} \quad \text{ou} \quad \frac{4}{8} = \frac{c'}{4};$$

ou

$$c^2 = ac' \quad \text{et} \quad 4^2 = 8c' \quad (c' = 2).$$

c' est donc déterminé et l'on construit le rectangle

équivalent au côté de carré c : ce rectangle aura a pour base et c' pour hauteur, ce qui donne :

$$c^2 = ac \quad \text{ou} \quad 4 \times 4 = 8 \times 2$$

Mais le rectangle ayant $a = 8$ pour base et $c' = 2$

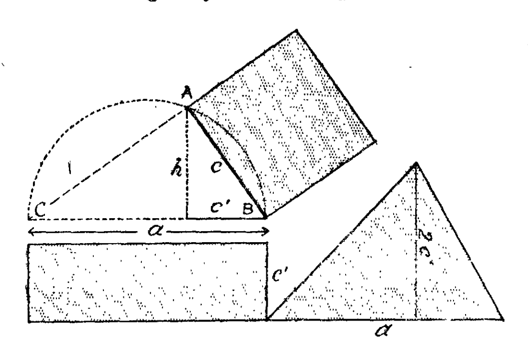


Fig. 195. — Le carré, le rectangle et le triangle ombrés sont équivalents.

pour hauteur est équivalent à un triangle ayant une hauteur double ou $2c' = 4$; en effet, on a :

Surf. du carré	*Surf. du rectangle*	*Surf. du triangle*
$c^2 = 4 \times 4 = 16$	$ac' = 8 \times 2 = 16$	$a \times \frac{2c'}{2} = 8 \times \frac{4}{2} = 16$

180. *Calculer le talus d'un mur de soutènement dont la coupe représente un triangle rectangle qui a 8 m. de hauteur verticale et 3 m. de base.*

Le talus est l'hypothénuse du triangle et le théorème de Pythagore nous donne :

$$x^2 = 8^2 + 3^2 = 73 \quad \text{d'où} \quad x = \sqrt{73} = 8^{m},444$$

181. *Avec une échelle de* 12 *mètres, on veut atteindre à une fenêtre située à* 9 *m.* 50 *du sol; quel écartement faut-il donner au pied de l'échelle ?*

On a encore un triangle rectangle dont on connaît l'hypothénuse ($a = 12$ m.) et un côté de l'angle droit ($b = 9$ m. 5); le côté c est l'inconnue donc

$$c^2 = 12^2 - (9,5)^2 = 53,75 \quad \text{et} \quad c = \sqrt{53,75} = 7^{m},23.$$

182. *Un triangle équilatéral a* 20 *mètres de côté ; quelle est sa surface?* On abaisse une hauteur qui divise le triangle primitif en deux triangles *rectangles* égaux ayant pour côtés h la hauteur, 20 m. (hypothénuse) et 10 m. moitié du côté primitif (v. la figure 22).

On aura donc

$$h^2 = 20^2 - 10^2 = 300 \quad \text{d'où} \quad h = \sqrt{300} = 17,32.$$

La surface du triangle équilatéral sera donc obtenue par le demi-produit de la base 20 par la hauteur 17,32 ou

$$S = \frac{20 \times 17,32}{2} = 173^{m^2},20.$$

182. *La diagonale d'un carré vaut* 60 *mètres, quelle est sa surface ?*

Pour l'obtenir, on pourra considérer le carré comme une variété de losange. Il suffit donc de multiplier cette diagonale par sa moitié et l'on aura

$$S = 60 \times 30 = 1\,800 \text{ m}^2.$$

184. *Deux communes sont à une distance de* 2 300 *m. l'une de l'autre, et leur différence de niveau est de* 34 *m.* 50. *On demande quelle sera la pente par mètre de la route rectiligne qui les reliera.*

La pente totale de 34 m. 50 sera répartie uniformément sur les 2 300 mètres. Chaque mètre de route aura donc 1/2300 de 34 m. 50, soit 0 m. 015 par mètre

185. *Dans une route, la pente uniforme est de* 0 *m.* 002 *par mètre ; calculer* 1° *la différence de niveau entre deux points distants de* 750 *mètres ;* 2° *la longueur de la ligne horizontale ou de niveau.*

La pente totale sera de $750 \times 0{,}002 = 1{,}50$.

La ligne de niveau sera le côté (x) d'un triangle rectangle, dont on connaît l'hypothénuse = 750 m. et un autre côté = 1 m. 50 ; on aura donc :

$$x^2 = 750^2 - (1{,}5)^2 \text{ et } x = \sqrt{750^2 - (1{,}5)^2} = 749^{\text{m}},90.$$

186. *Calculer la distance à laquelle se rencontreront la droite menée par les centres de deux circonférences et la tangente extérieure commune à ces deux circonférences.* Soient :

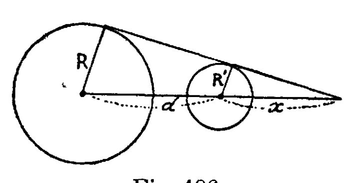


Fig. 196.

d la distance des centres des circonférences de rayon R et R′ et x la distance à laquelle les deux droites

se rencontreront à partir du centre de l'une d'elles. Les triangles semblables donneront (fig. 196) :

$$\frac{x}{R'} = \frac{d \times x}{R} \text{ ou } Rx = R'(d + x)$$

qui devient $Rx = R'd + R'x$, ou encore :

$$x = \frac{Rd'}{R - R'} \text{ ou } x = d. \frac{R'}{R - R'}.$$

Cette formule est en tout point semblable à celle que nous avons obtenue au *Problème des courriers* (v. *Algèbre* nº 107) ; on peut la discuter de la même façon.

Si d est positif et si l'on a $R > R'$, le dénominateur sera positif et le point de rencontre aura lieu à droite des circonférences, car *on convient de compter les distances positives vers la droite.*

Si l'on a $R < R'$, le dénominateur est négatif, x devient négatif et la petite circonférence se trouve *à gauche* de la grande.

Enfin si $R = R'$, c'est-à-dire si les circonférences sont d'égal rayon, on a $R - R' = 0$ et la fraction

$$\frac{R'}{R - R'} \text{ devient } \frac{R'}{0} = \infty, \text{ symbole de l'}\textit{infini};$$

dans ce cas, en effet, la tangente est parallèle à la ligne des centres, car l'on sait que les parallèles se rencontrent à l'*infini*, c'est-à-dire *jamais*.

Ce problème trouve son application en Astronomie,

où l'on considère la longueur du cône d'ombre projeté par le Soleil derrière la Lune et la Terre ; on en tient compte dans le calcul des Eclipses. C'est ce que nous verrons plus tard, en étudiant ces phénomènes dans un volume spécial.

SIXIÈME LEÇON

SURFACE DES POLYGONES RÉGULIERS ET DU CERCLE

187. Parmi les polygones qui s'offrent à l'examen du géomètre, il existe un genre très intéressant dont l'étude conduit à calculer la surface du cercle : c'est celui des polygones appelés réguliers, c'est-à-dire qui ont tous leurs côtés égaux et leurs angles égaux. Ces conditions sont toujours réalisées, lorsqu'on divise la circonférence en parties égales, c'est-à-dire en arcs égaux, et qu'on joint par des cordes, nécessairement égales, les points de division.

Fig. 197. Triangle équilatéral inscrit.

Le polygone régulier le plus simple est le triangle équilatéral. On l'obtient, ainsi que nous pouvons l'inférer du nº 141, en joignant les extrémités des arcs de 120°, puisque $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ (fig. 197).

Chacun des angles du triangle étant inscrit, a pour

mesure la moitié de l'arc intercepté, donc la moitié de 120° ou 60°.

Divisons maintenant la circonférence en 4 arcs égaux : ceux-ci auront chacun $\frac{360}{4} = 90°$ Nous obtiendrons facilement cette division en menant deux diamètres perpendiculaires. Joignons les points de division, nous avons un quadrilatère dont tous les côtés sont égaux (cordes d'arcs égaux); ce ne peut donc être qu'un losange ou un carré (fig. 198).

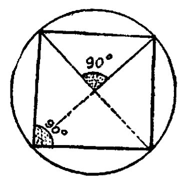


Fig. 198.
Carré inscrit.

Examinons les angles du polygone : ils sont tous inscrits dans une demi-circonférence ; donc ce sont des angles droits (n° 133) ; notre quadrilatère est donc un carré. Ce dernier rentre alors dans la catégorie des polygones réguliers.

Joignons encore par des cordes, les points obtenus en divisant la circonférence en 6 parties égales : nous aurons un polygone à 6 côtés (hexagone) égaux. Voyons s'il est régulier. Pour nous en assurer, il suffira de mesurer des angles.

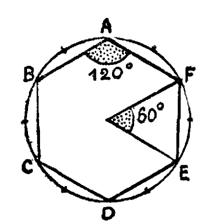


Fig. 199.
Hexagone régulier inscrit.

Chaque corde ou côté sous-tend un arc de $\frac{360}{6} = 60°$. Donc l'angle A, par exemple, étant inscrit, a pour

mesure la moitié de l'arc BCDEF, soit la moitié de 4 arcs de 60°, ou la moitié de $4 \times 60 = 240°$ ce qui nous fait 120°. Je puis en dire autant des angles B, C, D, etc., ils ont tous 120°. L'hexagone est donc régulier (fig. 199).

Tous ces polygones : triangle équilatéral, carré, hexagone régulier, ayant leurs sommets sur la circonférence sont appelés *polygones inscrits*. La circonférence est alors dite *circonscrite* au polygone

Fig. 200.

188. L'*angle au centre* d'un polygone régulier est celui qui, occupant le centre de la circonférence circonscrite, a pour côtés les rayons menés aux deux extrémités d'un côté du polygone.

On l'obtient facilement en divisant 360° par le nombre de côtés du polygone.

Ainsi nous aurons :

Angle au centre de l'hexagone $= \frac{360}{6} = 60°$

— du carré $= \frac{360}{4} = 90°$

— du triangle équilatéral $= \frac{360}{3} = 120°$

Les angles au centre étant tous égaux entre eux dans un polygone régulier, décomposent ce polygone en autant de triangles qu'il y a de côtés et ces triangles

sont isocèles, puisque deux de leurs côtés sont toujours des rayons du cercle circonscrit : c'est d'ailleurs ce que l'on peut vérifier sur la figure 200.

189. Maintenant, menons dans chacun de ces triangles la perpendiculaire qui, partant du centre, tombe sur chaque côté du polygone. Cette perpendiculaire divisera chaque côté en deux parties égales et, comme les triangles partiels sont égaux, toutes ces perpendiculaires seront égales : on les appelle *apothème* du polygone. Leurs pieds se trouvant à égale distance des centres, sont donc répartis sur une circonférence intérieure, qu'on dit *inscrite* dans le polygone. Ainsi OM, OM', OM'' ont toutes une valeur égale qui est l'apothème de l'hexagone (fig. 201). La circonférence inscrite passe donc par ces points et comme les côtés du polygone sont perpendiculaires à OM, OM' OM'', cette circonférence est tangente intérieurement aux côtés de ce même polygone.

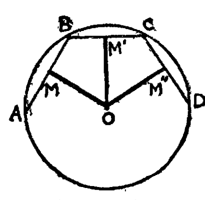


Fig. 201.

190. *Remarque.* — Le rayon du cercle *circonscrit* au polygone régulier est le plus souvent désigné par R, celui du cercle inscrit par r qui n'est autre que l'apothème du polygone.

L'hexagone offre une particularité intéressante ; son côté égale le rayon du cercle circonscrit, ou si vous représentez par a le côté de l'hexagone, $a = R$ (fig. 202).

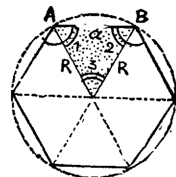


Fig. 202.

Considérons en effet un des triangles partiels composant l'hexagone ; l'angle au centre (3) vaut 60° (n° 188) ; mais les angles en A et en B de l'hexagone valent chacun 120° (n° 187), il ne reste donc pour la valeur des angles 1 et 2 du triangle que la moitié de 120°. Ainsi, angles 1, 2 et 3 valent chacun 60°. Donc le triangle est équiangle, par la même équilatéral (n° 141) ; donc $a = R$.

Les tonneliers connaissent depuis longtemps cette conclusion. Pour trouver le centre de la surface circulaire formant le fond de leurs futailles, ils divisent par tâtonnements la circonférence en 6 parties égales : c'est le *rayon* (du cercle) dont ils ont ainsi la valeur.

191. *Calcul de l'apothème d'un polygone régulier dont on connaît le côté.*

Nous allons prendre d'abord l'exemple de l'hexagone que nous connaissons un peu mieux que les autres polygones réguliers. Soient a le côté et R le rayon du cercle circonscrit ; ils sont égaux dans ce cas particulier. Cherchons la valeur de l'apothème r. Rien

de plus simple, grâce au théorème de Pythagore. Le triangle ombré est rectangle ; nous connaissons son hypothénuse R. Le côté r est inconnu, mais l'autre côté vaut la moitié de a côté du polygone, soit $\frac{a}{2}$ (fig. 203).

Nous aurons donc, en appliquant le théorème du carré de l'hypothénuse :

$$(1) \qquad r^2 = R - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \text{ou} \quad R^2 - \frac{a^2}{4};$$

ceci, c'est la formule générale, mais dans le cas de l'hexagone, $R = a$, et l'on aura, en remplaçant R par a :

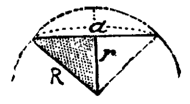


Fig. 203.

$$(2) \qquad r^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}.$$

Calculons cette valeur au moyen d'un exemple numérique. *Soit 6 m. le côté d'un hexagone. On demande la longueur de son apothème.* Nous aurons donc

$$a = R = 6 \quad \text{et} \quad R^2 \text{ ou } a^2 = 36$$

$$\frac{a}{2} = 3 \quad \text{et} \quad \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \text{ou} \quad \frac{a^2}{4} = 9.$$

Donc

$$r^2 = 36 - 9 = 27;$$

$$r = \sqrt{27} = 5^m,196.$$

On peut trouver une expression plus simple pour

tous les hexagones. En effet, nous avons les transformations successives :

$$(2) \quad r^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \quad \text{ou} \quad r^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4} \quad \text{ou} \quad r^2 = \frac{3a^2}{4}$$

d'où

$$r = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} \text{ ou } r = \frac{\sqrt{3a^2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3a^2}}{2} \text{ ou encore}$$

$$r = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{a^2}}{2} \text{ ou finalement } r = \frac{a}{2} \times \sqrt{3} \text{ ou } \frac{R}{2} \cdot \sqrt{3}$$

Ainsi, pour avoir l'apothème de l'hexagone, il suffit de multiplier la moitié de son côté (ou la moitié du rayon du cercle circonscrit) **par $\sqrt{3}$** (qui égale 1,732) ou $\frac{R}{2}\sqrt{3}$.

Cette règle appliquée à un hexagone de 6 m. de côté nous donne :

$$\text{Apothème} = \frac{6}{2} \times 1{,}732 = 3 \times 1{,}732 = 5{,}196$$

résultat déjà obtenu.

Pour un polygone quelconque, R n'est plus égal à a et il faut se servir de la formule (1) que nous allons transformer :

On a en effet :

$$r^2 = R^2 - \frac{a^2}{4} \text{ ou } r^2 = \frac{4R^2 - a^2}{4}$$

$$\text{et } r = \sqrt{\frac{4R^2 - a^2}{4}} \quad \text{ou} \quad r = \frac{\sqrt{4R^2 - a^2}}{2}$$

192. *Le côté* a *d'un polygone régulier étant donné, calculer le côté* c *d'un polygone régulier ayant un nombre de côtés double du premier.*

Ainsi, dans la figure 204, $AB = a$; si je double les côtés du polygone, j'obtiendrai $AC = c$. Prolongeons CO jusqu'en D, j'ai un diamètre. Le triangle CAD est rectangle en A, donc c est moyenne proportionnelle entre l'hypothénuse CD, qui égale 2R et sa projection sur l'hypothénuse qui n'est autre que c'.

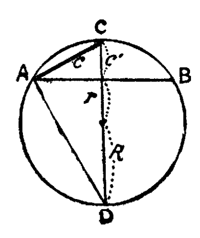


Fig. 204.

Mais $c' = R - r$ car si j'enlève r, apothème du polygone, de R, j'obtiens bien c'. J'aurai donc, en traduisant ce que je viens d'énoncer :

$$c^2 = 2R \times c' \quad \text{ou} \quad c^2 = 2R\,(R - r)$$

et finalement $$c = \sqrt{2R\,(R - r)}.$$

Appliquons cette formule à la recherche du côté du polygone qui a 12 côtés (dodécagone) en partant de l'hexagone régulier.

Un hexagone régulier a un côté de 6 m. On demande la valeur du côté du dodécagone inscrit dans la même circonférence.

On sait que l'on a ici $a = R = 6$ m. ; r ou apothème $= 5{,}196$ (n° 191) d'où $R - r = 6 - 5{,}196 = 0{,}804$.

Nous écrirons donc

$$c^2 = (2 \times 6)(0,804) = 12 \times 0,804 = 9,648\,;$$

d'où

$$c = \sqrt{9,648} = 3,102$$

193. La façon de trouver l'apothème et la solution du problème précédent permettent de déterminer, dans un cercle de rayon connu, le côté d'un polygone obtenu après avoir *doublé autant de fois que l'on veut* les côtés d'un premier polygone élémentaire, c'est-à-dire à 4, 5 ou 6 côtés. Cette méthode va nous faire comprendre dans un instant, comment, par ces sortes de considérations, les géomètres ont pu arriver à déterminer la longueur de la circonférence.

Auparavant, je vous proposerai de nous attarder quelque peu sur un sujet auquel j'ai fait allusion plusieurs fois, sur lequel je n'ai pas voulu insister, mais qu'il est grand temps d'aborder, si nous voulons posséder des idées claires sur les méthodes employées dans la Géométrie moderne.

La notion de limite.

194. Nous avons dit que la tangente pouvait être considérée comme la limite des positions que prend une sécante mobile, lorsque les deux points de contact se rapprochent *indéfiniment* l'un de l'autre : les deux points de contact dont il s'agissait dans notre défini-

tion se rapportaient aux deux points où la sécante rencontrait la circonférence (v. n° 165) ; c'étaient en somme les deux extrémités de la corde. Cette nouvelle définition a l'avantage de servir pour n'importe quelle courbe.

De même, nous concevons que si nous doublons successivement le nombre des côtés d'un polygone régulier, ces côtés deviendront de plus en plus petits ; ce seront des cordes formant toujours une ligne brisée, évidemment, mais telle, qu'elle tendra de plus en plus à se confondre avec la circonférence. Peut-on, par ce procédé, espérer atteindre cette dernière ? Pas du tout : dussions-nous y employer toute notre existence, nous aurons sans cesse des polygones se rapprochant de la circonférence, mais dont les côtés auront tout de même une grandeur déterminée. Pourrons-nous dépasser la circonférence ? Assurément non. Cette circonférence est donc *la limite vers laquelle* nous nous acheminerons par nos opérations successives (fig. 205).

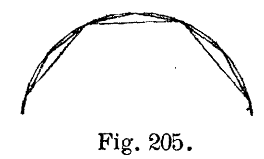


Fig. 205.

Ainsi, voilà deux exemples de *limite*, qui font bien comprendre le sens de ce mot en Mathématiques.

Toutefois, afin d'employer cette expression à bon escient, il ne sera pas superflu d'en donner une définition précise.

On appelle *limite* d'une grandeur *variable*, une grandeur *fixe* dont la grandeur variable peut différer d'aussi peu qu'on veut, sans toutefois l'atteindre.

Ainsi, pour qu'on puisse considérer *la limite d'une grandeur*, il faut que cette grandeur *varie* et qu'on la compare à une autre grandeur *fixe*, celle-là, c'est-à-dire *invariable*. Si cette condition n'est pas réalisée, il ne peut être question de limite.

Notez encore que la limite n'est jamais atteinte. Prenez une longueur quelconque, une route par exemple, entre deux points A et B ; faites la moitié du chemin, puis la moitié de ce qui reste, puis la moitié encore du reste. etc. ; quand arriverez-vous en B ? Jamais, évidemment, d'après la façon dont le problème est posé. La moitié de la quantité qui vous restera à faire à chaque instant, sera en effet une grandeur toujours susceptible d'être partagée en deux. Le chemin accompli augmentera cependant, il sera donc *variable* ; il différera même d'aussi peu que vous voudrez de la route entière, mais le point B, extrémité de la ligne AB, marquera la limite que vous ne pourrez, non seulement dépasser, mais *jamais* atteindre.

La variable (ici, chemin parcouru) aura pour limite la grandeur fixe qui est la route tout entière. soit AB.

Ce sont ces considérations qui ont conduit les mathématiciens à imaginer le *calcul infinitésimal*, dont vous avez certes, entendu parler ; ce calcul s'appelle

ainsi parce qu'il repose sur la notion des infiniment petits, notion dérivée elle-même de la définition de la limite.

En effet, *une quantité infiniment petite*, ou l'infiniment petit de grandeur, est précisément cette grandeur qui reste pour atteindre la limite ; et, par hypothèse, vous pouvez évidemment la concevoir aussi petite que vous voudrez, même non mesurable, mais elle diffère essentiellement de la grandeur zéro, qui est le point ou l'absence d'étendue en Géométrie.

Dans ces conditions, *l'infiniment petit est essentiellement une quantité variable ayant zéro pour limite.* Le terme *infiniment petit* est donc très mal choisi, mais ceux qui l'emploient savent fort bien qu'il est mis là pour remplacer les mots *indéfiniment petit.*

Vous comprendrez mieux maintenant la signification de ce fameux symbole que nous avons rencontré en étudiant l'Algèbre (*Algèbre*, n° 104). Nous avons admis que $\frac{m}{0} = \infty$. Qu'est-ce à dire ? Nous avions une quantité quelconque m que nous avons divisée successivement par des quantités toujours plus petites et nous avons constaté que le quotient augmentait sans cesse. Le diviseur représentait ainsi des quantités *indéfiniment décroissantes ;* leur valeur tendait donc sans cesse vers zéro qui pouvait être considéré comme leur limite, tandis que les quotients successifs *crois-*

saient de même *indéfiniment* et avaient pour limite ∞ ou l'infini.

A quoi, direz-vous, toutes ces considérations peuvent-elles servir ? A résoudre des problèmes que les anciens, ignorant ces notions, avaient à peine abordés. Grâce à Leibnitz qui est le père du calcul infinitésimal, les sciences qui relèvent des Mathématiques : Physique, Mécanique, Géométrie, Astronomie, ont fait des progrès inouis. On démontre en effet, par exemple, en Analyse, que *lorsqu'une égalité subsiste pendant qu'une quantité varie, cette égalité subsiste encore à la limite*. Ce principe s'applique aussi aux proportions : c'est ainsi que *lorsque deux quantités variables ont un rapport constant, ce rapport reste le même à la limite*. Cette dernière proposition permet, en particulier, de démontrer les théorèmes relatifs aux angles ou aux surfaces, lorsqu'on fait entrer en ligne de compte des quantités incommensurables. Ainsi malgré qu'il n'y ait parfois aucune commune mesure entre un arc et un autre, ou bien entre la base d'un triangle et celle du côté du carré pris pour unité, les propositions que nous avons démontrées restent vraies rigoureusement.

De même, le calcul infinitésimal et la notion de limite permettent de passer de la ligne droite, ou brisée, à une courbe.

Ce que nous dirons par exemple du périmètre d'un

polygone régulier dont les côtés décroissent indéfiniment alors que leur nombre augmente d'autant, sera vrai pour la circonférence, puisque cette dernière est la limite vers laquelle tend un polygone dont on double indéfiniment le nombre des côtés.

Ces réflexions étaient nécessaires pour que vous compreniez clairement les méthodes que nous emploierons en recherchant, à partir des polygones réguliers, la longueur de la circonférence et la surface du cercle. Elles vous éviteront aussi d'employer des expressions fausses que nous rencontrons à chaque instant dans des manuels de Géométrie à l'usage des écoles primaires. Au moment où j'écris ces lignes, j'en ai un sous les yeux, qui n'hésite pas à affirmer que « le cercle est un polygone régulier d'un nombre infini de côtés » alors qu'il faudrait dire que le cercle est la surface *limite* d'un polygone régulier dont on double indéfiniment le nombre des côtés, ou, si vous voulez, la limite *vers laquelle tend* la surface d'un polygone régulier, etc...

Vous voyez la différence entre les deux conceptions : la première, celle du manuel primaire, est radicalement fausse et conduit à des définitions absolument contradictoires, puisque nous en déduirions aussitôt qu'un cercle est un polygone, qu'un cône est une pyramide, etc., etc... La Géométrie nous a appris à faire bonne justice de ces raisonnements grotesques qu'on

ne craint pas d'enseigner quasi-officiellement aux enfants et aux jeunes gens ; l'étude rationnelle de la Géométrie, telle que nous venons de la faire, nous a donc donné des idées claires et précises sur les grandeurs et leurs relations ; elle nous a familiarisés avec la saine logique et n'en aurions-nous retiré que cet avantage que nous en saisirions ainsi l'incontestable utilité.

En résumé, la Géométrie nous apprend à raisonner et c'est bien l'explication de ces paroles de Platon que nous avons citées au début de ces leçons : « Nul n'entre ici s'il n'est géomètre », insinuant par là même, que la Géométrie est la meilleure introduction à la philosophie, c'est-à-dire à l'art de raisonner juste.

Surface des polygones réguliers.

195. Reprenons notre hexagone ; dessinons-le sur un papier blanc et découpons sa surface très proprement. Il s'agit maintenant de chercher le moyen d'évaluer cette surface (fig. 206).

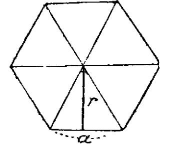


Fig. 206.

Je vais d'abord, avec quelques coups de ciseaux, le découper en triangles partiels ; nous en aurons 6 égaux entre eux le correspondant aux côtés.

Calculons la surface d'un des triangles : il suffira

de multiplier sa base par la moitié de la hauteur d'après la formule connue (n° 88) :

$$s = b\,\frac{h}{2}.$$

Mais ici, la base n'est autre que le côté a de l'hexagone et la hauteur de chaque triangle est *l'apothème* r.

La formule

$$s = b.\,\frac{h}{2} \text{ deviendra donc } s = a.\,\frac{r}{2}.$$

Si nous appelons S la surface totale des 6 triangles (ou de l'hexagone), nous aurons :

$$S = 6s = 6\left(a.\,\frac{r}{2}\right)$$

que nous pouvons écrire ainsi :

$$S = 6s = 6a \times \frac{r}{2}.$$

Mais 6 fois a ou 6 a, c'est le périmètre, le pourtour du polygone, c'est-à-dire 6 fois son côté. Ainsi, nous voyons que *la surface de l'hexagone vaut le produit de son périmètre par la moitié de son apothème,* ce qui revient à dire que la surface de notre hexagone représentée par les 6 triangles partiels mis les uns à côté des autres, équivaut à la surface d'un grand triangle (fig. 207) qui aurait pour base la somme des bases des petits triangles (6 a ou périmètre de l'hexagone) et pour hauteur la hauteur commune à ces triangles partiels, soit r (apothème).

Si au lieu d'être un hexagone, le polygone envisagé avait un nombre quelconque de côtés, sa surface serait

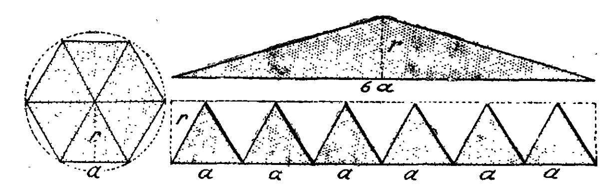


Fig. 207. — Décomposition de l'hexagone en 6 triangles égaux dont la surface totale équivaut à celle du grand triangle du dessus.

toujours exprimée par le périmètre multiplié par la moitié de l'apothème.

Nous aurions simplement un plus grand nombre de

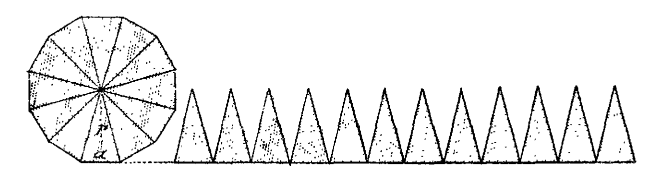


Fig. 208. — La surface totale des petits triangles de droite est équivalente à celle du polygone de gauche.

triangles dont les bases peuvent être aussi petites que nous le désirons, suivant le nombre de côtés adoptés (fig. 208).

196. Or, cette proposition est vraie à la limite, et comme la limite vers laquelle tend un polygone dont

on double indéfiniment le nombre des côtés est la surface du cercle, nous dirons que *la surface du cercle doit s'obtenir en multipliant son périmètre (circonférence) par la moitié de son rayon.*

Comment, penserez-vous, le rayon intervient-il ici ? Pour une raison facile à saisir. Dans nos triangles partiels (tous isocèles) des polygones considérés, les deux côtés égaux avaient pour valeur R, c'est-à-dire le rayon du cercle circonscrit, tandis que la hauteur est égale à r, apothème ; mais il est facile de voir qu'en multipliant les triangles, leurs bases diminuent, puisqu'elles représentent des cordes plus petites. Donc leurs distances au centre (hauteur des triangles) s'allongent. Ainsi r tend à égaler R, ou si vous voulez, l'écart entre les côtés latéraux des triangles isocèles et leur hauteur tend de plus en plus à diminuer ; cette différence tend vers zéro, c'est-à-dire à être nulle, et R est bien la limite de r, comme la circonférence est la limite du périmètre. Appliquant nos principes sur les limites, nous aurons donc bien pour l'expression de la *surface du cercle, le produit de la circonférence par la moitié du rayon.*

Nous pouvons résumer toutes ces conclusions sous une forme plus concise. Appelons le périmètre du polygone P et soit C la longueur de la circonférence, nous aurons :

P (périmètre) a pour limite C (circonférence) ;

r (apothème) a pour limite R (rayon du cercle); nous écrirons donc rigoureusement :

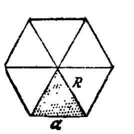
$$\text{Surface du poligone} = P \times \frac{r}{2} \text{ et}$$

$$\text{Surface du cercle} = C \times \frac{R}{2} .$$

Il ne s'agit plus maintenant que d'apprendre à évaluer la longueur de la circonférence. Pour en arriver là, il faut encore étudier quelques propriétés des polygones réguliers.

Longueur d'une circonférence.

197. Reprenons notre hexagone de tout à l'heure et découpons encore dans une circonférence plus petite, un autre hexagone régulier (fig. 209). Nous allons tout d'abord montrer que ces deux polygones sont semblables, c'est-à-dire qu'ils ont leurs côtés proportionnels et leurs angles égaux (n° 174). Cela résulte du fait qu'ils sont composés l'un et l'autre d'un même nombre de triangles pareillement disposés (il y en a 6 dans chacun) et que ces triangles partiels sont semblables



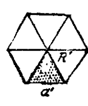


Fig. 209.

En effet, considérons les deux triangles du bas. Soient a le côté du grand polygone, a' celui du petit ; ces deux cotés forment la base des deux triangles (grand et petit). Les angles à la base sont égaux, ils ont

même valeur qui est, ici, 60 degrés. Les côtés adjacents à la base ne sont autres que R et R' rayons des polygones et des cercles circonscrits et l'on a bien des triangles semblables (3 angles égaux chacun à chacun).

Nous pourrons donc écrire

$$\frac{a}{a'} = \frac{R}{R'}.$$

On ne changera pas l'égalité précédente si l'on multiplie par 6 les deux termes du premier rapport et l'on a :

$$\frac{6a}{6a'} = \frac{R}{R'}$$

Mais 6 a et 6 a' représentent les périmètres de nos polygones. Donc il faut conclure que les *périmètres sont entre eux comme les rayons.*

Nous pouvons maintenant prendre des polygones de 8, 10, 12, 24, 100 côtés, le raisonnement employé ici sera toujours valable. Nous aurons toujours des polygones décomposables en un même nombre de triangles semblables et le rapport des périmètres aux rayons subsistera, si bien qu'on aura d'une façon générale, P et P' étant les périmètres :

$$\frac{P}{P'} = \frac{R}{R'},$$

Donc, *dans des polygones réguliers d'un même nombre de côtés, les périmètres sont entre eux comme les rayons.*

Mais, d'après ce que nous avons dit, si l'on double le nombre des côtés indéfiniment, le périmètre tend

vers la circonférence C ; donc P a pour limite C et la proportion est encore exacte quand nous écrivons

$$\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'} ;$$

ou, en multiplant les deux termes du second rapport par 2 (ce qui ne détruit pas l'égalité et qui introduit 2 R = Diamètre) :

$$\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'} .$$

Remarquons que cette proportion peut enfin être transformée en celle-ci :

$$\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'} .$$

Il y a donc même rapport entre une circonférence et son diamètre qu'entre une autre circonférence et le diamètre de cette dernière et, d'après l'égalité ci-dessus, ce rapport reste constant, donc :

$$\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'} = \frac{C''}{2R''} = k \text{ (constante)} .$$

Nous en tirons immédiatement une autre conclusion que vous n'aviez pas prévue : *Le rapport entre une circonférence quelconque et son diamètre est toujours un nombre constant;* ce nombre constant est désigné généralement par l'initiale du mot grec *périmétrone* (périmètre) qui s'écrit π et se prononce *pi.*

Avant de donner la valeur de π, formulons deux conclusions qui s'imposent et sur lesquelles nous n'aurons plus à revenir. De même que des polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables, *des cir-*

conférences de rayon quelconque sont toujours des figures semblables.

Enfin, puisque les surfaces de deux polygones semblables sont entre elles comme le carré de leurs côtés homologues ou de leurs rayons, s'ils sont réguliers et possèdent autant de côtés, nous dirons que *les surfaces de deux cercles sont entre elles comme le carré de leurs rayons :* à un rayon 3 fois plus grand correspondra une surface $3 \times 3 = 9$ fois plus étendue, etc.

198. Valeur de π, rapport du diamètre à la circonférence.

Puisque le rapport du diamètre à la circonférence est toujours le même, on pourrait se contenter pour l'obtenir, de mesurer très exactement avec un fil inextensible, un fin ruban d'acier par exemple, la longueur du pourtour d'un plateau circulaire ayant *un mètre de diamètre*. On obtiendrait ainsi expérimentalement une valeur très approchée de π ; mais ce procédé n'est pas géométrique et ne saurait donner une valeur réelle indiscutable ; enfin, pour qui sait la difficulté de pareilles mesures avec plusieurs décimales exactes, il est évident qu'il vaut mieux avoir recours à des méthodes basées sur les principes de la Géométrie.

Celles-ci d'ailleurs ne manquent pas, nous n'avons que l'embarras du choix ; mais dans ce volume élémentaire, nous n'exposerons que la plus simple,

celle qui a été inventée par Archimède au IIIe siècle avant Jésus-Christ. Ce géomètre célèbre, disciple d'Euclide, avait trouvé pour valeur de π le nombre 3,1428 alórs que nous sommes sûrs aujourd'hui que $\pi = 3,1415926$; il y avait donc une erreur portant sur les 3e et 4e décimales. Le géomètre hollandais, Métius, qui vivait au XIIe siècle, a donné comme valeur approchée, le nombre 3,1415920 soit 6 décimales exactes.

Les géomètres ont calculé π avec 500 décimales exactes, et la liste ne saurait en être close, attendu que *π est un nombre incommensurable, ainsi que toutes ses puissances.*

Pratiquement, d'ailleurs, tout cela n'a qu'une importance très relative et nous en dirons la raison au moment où nous passerons aux applications. Voyons, en attendant, la méthode d'Archimède.

Prenons encore notre hexagone régulier comme point de départ. Son rayon, nous l'avons vu, est exactement égal à celui du cercle circonscrit ; prenons-le comme *unité* : dans ce cas $R = 1$; que vaut le périmètre de ce même hexagone? 6 fois le côté, nous l'avons démontré ; donc $P = 6$.

Doublons les côtés de l'hexagone, nous avons un dodécagone (12 côtés) dont le rayon reste égal à 1. Nous pouvons calculer son côté, donc son périmètre, par la méthode indiquée précédemment (n° 192). Si nous

effectuons ce calcul, nous trouvons 6,21156 au lieu de 6 dans l'hexagone. C'est qu'en fait, le nouveau périmètre se rapproche de la circonférence : il doit donc être plus grand que le périmètre précédent. Doublons encore, nous trouverons pour le périmètre du polygone de 24 côtés, le nombre 6,25848.

Nous pouvons aller très loin dans cette voie et chercher succesivement les périmètres des polygones réguliers de 48, 96, 192 etc. côtés ; le rayon restera toujours égal à l'unité, tandis que les périmètres obtenus grandiront et se rapprocheront de la circonférence.

Je vous laisse le soin d'effectuer les calculs, si bon vous semble ; c'est un jeu de patience auquel on peut s'amuser, surtout si l'on emploie les logarithmes pour abréger les opérations.

Les résultats sont d'ailleurs compris dans le Tableau suivant et vous dispenseront d'un si louable effort.

Nombre des côtés du polygone.	Valeur du périmètre.
6	6,00000
12	6,21156
24	6,25848
48	6,27850
96	6,28206
192	6,28290
384	6,28311
768	6,28316
1536	6,28318
3072	6,28318

Examinons d'un peu près ce Tableau : nous constatons tout d'abord que les périmètres augmentent très lentement, malgré la duplication des côtés ; à partir du dodécagone, la première décimale (2) reste la même ; la seconde ne change plus dès qu'on atteint le polygone de 96 côtés ; enfin, quand on arrive aux polygones de 1536 et de 3072 côtés, nous avons 5 décimales communes. Ainsi, en nous contentant de ces résultats, nous voyons que le rapport du rayon au périmètre d'un polygone de 3072 côtés, c'est-à-dire assez approché d'une circonférence, est de 6,28318. Donc, le rapport de 2R (deux rayons) ou de un diamètre avec le périmètre considéré, sera de la moitié de 6,28318, soit 3,14159.

Vous voyez que nous avons déjà une bonne approximation du nombre π. Dans les calculs relatifs à ce nombre, on force généralement la 4e décimale et on prend 3,1416 pour valeur de π.

199. *Calculer la longueur d'une circonférence ayant 7 mètres de rayon.*

On cherche le diamètre : $7 \times 2 = 14$ m.

Si un cercle de 1 m. de diamètre a pour circonférence 3 m 1416, un cercle de 14 m. de diamètre aura une circonférence 14 fois plus grande ou

$$3,1416 \times 14 = 43 \text{ m}, 982.$$

Si R = rayon ; D = diamètre et C = circonférence, on aura les formules suivantes :

$$C = 2R\pi \quad \text{ou} \quad C = 2\pi R \quad \text{ou} \quad C = D\pi$$

Généralement, on adopte $C = 2\pi R$,

Si R est l'inconnue de la dernière formule, on tire la valeur de R et l'on a :

$$R = \frac{C}{2\pi} \text{ ou } 2R = \frac{C}{\pi} .$$

Longueur d'un arc dans une circonférence.

200. *Soit à calculer la longueur d'un arc de 30 degrés dans une circonférence de 4 m. de rayon.*

Voici les opérations successives à effectuer :

Longueur de la circonférence $= 2\pi R$

ou $2 \times 4 \times 3{,}1416 = 25$ m. 133.

$360^\circ = 25$ m. 133.

1° vaudra 360 fois moins ou $\frac{25{,}133}{360}$

et 30° vaudront 30 fois plus ou $\frac{25{,}133 \times 30}{360} = 2$ m, 094.

201. *Calculer dans un cercle de rayon R, la longueur d'un arc de* n *degrés.*

C'est le problème précédent mis sous une forme générale. Opérant comme précédemment, mais avec des lettres, nous aurons :

$$\text{Arc de } 1^\circ = \frac{C}{360} \text{ ou } \frac{2\pi R}{360} \text{ ou } \frac{\pi R}{180} .$$

Par suite, l'arc de n degrés sera n fois plus grand ou

$$\frac{\pi R n}{180}.$$

On met parfois cette formule sous la forme $\frac{\pi}{180} \times Rn$; si l'on sait que $\frac{\pi}{180} = 0{,}0174$, il suffira de multiplier ce nombre par Rn. Ainsi. le calcul précédent se réduirait à ceci :

$$\text{Arc de } 30° = 0{,}0174 \times 4 \times 30 = 2 \text{ m., } 09.$$

202. Surface du cercle.

Nous avons vu que la surface du cercle est égale au produit de la circonférence par la moitié de son rayon. Calculons cette expression, maintenant que nous avons la circonférence en fonction de π et de R.

Nous aurons :

$$\text{Surface du cercle} = \text{circonf.} \times 1/2 \text{ rayon}$$

ou

$$S = C \times \frac{R}{2}.$$

Mais $2 \pi R = C$ et peut le remplacer; il viendra donc :

$$S = 2\pi R \times \frac{R}{2} \quad \text{ou} \quad S = \pi R \times R = \pi R^2.$$

Ainsi, *pour trouver la surface d'un cercle il suffit d'élever son rayon au carré et de multiplier ce carré par 3,1416.*

Dans ces conditions, un cercle de 4 m de rayon aura pour surface.

$$S = 4^2 \times 3{,}1416 = 16 \times 3{,}1416 = 50 \text{ m}^2, 2654.$$

203. *Trouver le rayon d'un cercle dont la surface vaut 50* m², *2654.*

On partira encore de la formule précédente et on prendra R comme inconnue : on aura donc :

$$S = \pi R^2 \quad \text{d'où} \quad R^2 = \frac{S}{\pi}$$

et
$$R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

Ainsi, l'on divisera la surface par 3,1416 soit

$$\frac{50,2654}{3,1416} = 16;$$

16 est donc le rayon élevé au carré ou R^2, c'est-à-dire que

$$R^2 = 16 \quad \text{d'où} \quad R = \sqrt{16} = 4 \text{ m}.$$

Surface d'un secteur.

204 Le *secteur* est la surface comprise entre deux rayons et l'arc qu'ils interceptent sur la circonférence.

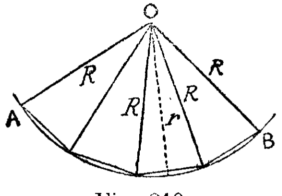


Fig. 210.

Soit à calculer l'aire du secteur circulaire AOB, le rayon du cercle étant égal à R (fig. 210).

Je divise l'arc en parties égales, en 4 par exemple ; je mène les cordes ; j'aurai ainsi une ligne polygonale régulière dont les parties peuvent servir de bases à des

triangles isocèles ayant pour côtés latéraux le rayon du cercle (R) et pour hauteur l'apothème r. La surface totale sera donnée par la somme des aires de ces triangles, ou ce qui revient au même, par la somme des bases multipliée par la moitié de la hauteur ou apothème.

Si nous doublons indéfiniment le nombre des côtés, leur somme aura pour limite l'arc lui-même, et l'apothème aura pour limite le rayon. La surface sera donc exprimée par

$$\text{Arc AB} \times \frac{R}{2}.$$

Ainsi, on traite le *secteur* comme s'il s'agissait d'un triangle et *pour obtenir sa surface, il suffit de multiplier la longueur de l'arc par la moitié du rayon.*

Fig. 211.

205. Application : Calculer l'aire d'un secteur de 54° dans un cercle de 3 mètres de rayon (fig. 211).

$$\text{Circonférence} = 2\pi R = 2 \times 3{,}1416 \times 3 = 18 \text{ m}, 8496;$$

$$\text{Arc de } 54^{\circ} = \frac{18 \text{ m}, 8496 \times 54}{360} = 2 \text{ m}, 8274;$$

$$\text{Surface du secteur} = \text{arc} \times \frac{R}{2}$$

ou $$2{,}8274 \times \frac{3}{2} = 4 \text{ m}^2 2411$$

Surface du segment

206. Le segment est la portion de cercle comprise entre un arc et sa corde. Sa surface peut être obtenue en enlevant de la surface du secteur correspondan la surface du triangle fourni par la corde et deux rayons.

Soit à calculer la surface du segment de 54° *dans un cercle de* 3 *mètres de rayon.*

J'ai (problème précédent) pour la surface du secteur 4 m^2, 2411. Il faut maintenant calculer la longueur de la corde de 54°. Le problème, cette fois, ne relève plus de la Géométrie. On le résout à l'aide de la Trigonométrie que nous apprendrons plus tard. Toutefois, on peut à l'aide d'une Table spéciale placée à la fin du volume, calculer aisément les cordes de tous les arcs dans une circonférence donnée.

Je trouve en effet à la Table, en regard de 54°, le nombre 0,908 : c'est la corde qui correspond à celle du cercle de 1 m. de rayon ; pour un cercle de 3 m. j'aurai :

Longueur de la corde $= 0{,}908 \times 3 = 2$ m, 724.

J'ai donc à calculer la hauteur d'un triangle isocèle ayant 2 m, 724 de base et 3 m. pour les deux côtés latéraux. Mais le triangle isocèle est composé de 2 triangles rectangles qui ont pour côtés la 1/2 base et la hauteur et pour hypothénuse le rayon (fig. 211).

J'aurai donc, d'après le théorème de Pythagore :
hauteur au carré = hypoth. au carré — 1/2 base au carré
ou $h^2 = 3^2 - \overline{1,362}^2$
d'où, après avoir effectué : $h = 2$ m, 673.

La Table dont j'ai parlé peut nous éviter ces calculs compliqués : elle donne en effet la valeur de la *flèche* pour tous les arcs. On sait qu'on nomme ainsi la portion du rayon qui, tombant perpendiculairement sur le milieu de la corde, part de ce milieu pour aboutir à l'arc. (V. fig. 123,)

Dans notre figure, on voit que la flèche vaut le rayon diminué de la hauteur.

Cherchons donc la flèche de l'arc de 54° dans le cercle de rayon de 1 m. Je trouve dans la Table 0,109 : je multiplie ce nombre par 3 pour avoir la flèche dans un cercle de 3 m. de rayon ; $0,109 \times 3 = 0,327$. Donc, la hauteur cherchée vaudra

$$h = 3 - 0,327 = 2,673.$$

Ainsi, le triangle isocèle ayant pour base 2 m, 724 a pour hauteur 2 m. 673 ;
dès lors la surface du triangle sera :

$$S = \frac{2,724 \times 2,673}{2} = 3\,m^2, 6459.$$

Je sais maintenant que
Surface du segment = surf. du secteur — surf. du triangle
ou
Surf. du segment = 4 m² 2411 — 4 m² 6459 = 0 m² 5952.

Surface d'une couronne circulaire.

207. La surface d'une couronne circulaire est la différence des surfaces de deux cercles concentriques.
Soit à calculer la surface d'une couronne circulaire ayant pour rayons 4 *m*,50 *et* 3 *m*,50 ;
on aura

Surf. du grand cercle $= \pi R^2 = 3,1416 \times 20,25 = 63$ m² 6172
Surf. du petit cercle $= \pi R'^2 = 3,1416 \times 12,25 = 38$ m² 4845

Différence $= \pi R^2 - \pi R'^2$. . . . . . 25 m² 1327

Ainsi, la surface de la couronne a pour expression

$$S = \pi R^2 - \pi R'^2 \text{ (R et R' étant les rayons);}$$

mettant π en facteur commun, il vient :

$$S = \pi (R^2 - R'^2) ;$$

Ce qui veut dire qu'on peut obtenir *la surface de la couronne en multipliant par 3,1416 la différence des carrés des rayons.*

Toutes ces opérations sont grandement facilitées au moyen des Tables placées à la fin du volume, ainsi que dans l'*Arithmétique* et l'*Algèbre*.

EXERCICES ET APPLICATIONS

208. *On demande la surface d'un hexagone régulier dont le côté est de* 1 *m.* 80. Le rayon du cercle circonscrit est ainsi égal à 1 m. 80 (n° 190), ce qui nous permettra de calculer l'apothème *r*.

Surface de l'hexagone = périmètre $\times \frac{r}{2}$

ou $$S = 6 \times 180 \times \frac{r}{2}.$$

Calcul de r. L'apothème est le côté d'un triangle rectangle dont l'hypothénuse = R = 1 m, 80 et dont l'autre côté est la moitié du côté de l'hexagone soit 0 m, 10. Nous aurons donc :

$$r^2 = (1{,}8)^2 - (0{,}9)^2 \quad \text{d'où} \quad r = \sqrt{2{,}43} = 1 \text{ m}, 554;$$

donc $$S = 6 \times 1{,}80 \times \frac{1{,}554}{2} = 8 \text{ m}^2, 3916.$$

209. *Calculer l'aire d'un secteur de* 64° *dans un cercle de* 3 *m. de rayon.*

Surface du cercle $= \pi R^2 = 3{,}1416 \times 9 = 28 \text{ m}^2\ 2744$;

$$\text{Surface de } 1° = \frac{28{,}2744}{360}$$

$$\text{et surface de } 64° = \frac{28{,}2744 \times 64}{360} = 5 \text{ m}^2, 025.$$

210. *Dans un cercle de* 4 *mètres de rayon, calculer le segment de* 90°. On calculera la surface du secteur AOB dont on retranchera la surface du triangle AOB (fig. 212).

AB est la corde du carré inscrit, donc le triangle AOB est rectangle en O et OA = OB = Rayon = 4 m.

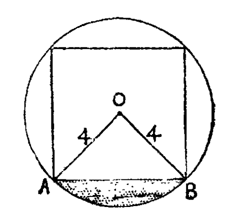


Fig. 212.

Surf. du secteur $= 1/4$ du cercle $= \frac{\pi 4^2}{4} = 4\pi = 12$ m²,5664;

Surf. du triangle AOB $= \frac{AO \times OB}{2} = \frac{R^2}{2} = \frac{16}{2} = 8$ m²;

Surf. du segment $= 12{,}5664 - 8 = 4$ m², 5664.

211. *Un hexagone régulier a une surface de* 64 *m²* 95 *et* 5 *m. de côté; quelle serait la surface d'un hexagone semblable ayant* 27 *m.* 30 *de côté?*

Les surfaces sont entre elles comme le carré de leurs côtés homologues.

Si donc S représente la surface du grand hexagone, nous pourrons écrire :

$$\frac{S^2}{64{,}95} = \frac{(27{,}30)^2}{5^2} \quad \text{d'où} \quad S = 1936 \text{ m}^2, 2634.$$

212. *Calculer le côté d'un carré équivalent à un cercle de* 6 *m. rayon.*

Surface du cercle $= \pi \times 6^2 = 113$ m², 0973;

Côté du carré $= \sqrt{113{,}097} = 10$ m, 63.

D'une manière générale, on a, c étant le côté du carré :

$$c^2 = \pi R^2 \quad \text{ou} \quad c = \sqrt{\pi R^2} = R\sqrt{\pi}.$$

Mais la racine carrée de π est incommensurable, comme π lui-même. Donc le côté du carré équivalent à un cercle de rayon quelconque est toujours un nombre incommensurable par rapport à ce rayon. Tel est

le problème dit de la quadrature du cercle : cette quadrature est impossible, comme l'indique la formule.

213. *Deux cercles concentriques ont, l'un 2 m. de rayon, l'autre 7 m. Quelle est la surface de la couronne circulaire qu'ils déterminent?*

On aura pour la surface de la couronne

$$S = \pi (R^2 - r^2) = \pi (7^2 - 2^2) = 141 \text{ m}^2{,}372.$$

214. *Construire un cercle double d'un cercle donné.*

Deux cercles étant des figures semblables sont entre eux comme le carré de leurs dimensions homologues, donc comme le carré de leurs rayons.

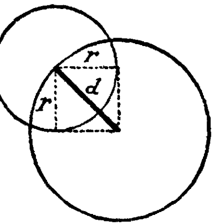


Fig. 213.

Sur le rayon r du petit cercle, je construis un carré dont je mène la diagonale d; j'ai

$$d^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$$

(fig. 213) ; d'où je vois clairement que si je construis un cercle de rayon d, ce cercle aura le double de surface du premier, puisque leurs surfaces seront entre elles comme r^2 et $2\,r^2$ ou d^2 ; en d'autres termes :

$$\frac{S}{S'} = \frac{r^2}{2r^2} \quad \text{ou} \quad \frac{r^2}{d^2} = \frac{1}{2}.$$

215. Nous terminerons ce premier volume de Géométrie par une remarque importante dans les applications

numériques à propos de l'emploi des nombres incommensurables comme $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, etc.

Généralement, on prend ces nombres avec 7 décimales dans une quantité de calculs : on croit ainsi àrriver à une plus grande approximation. C'est là une erreur contre laquelle on ne saurait trop réagir.

Ces nombres sont, en effet, toujours combinés par multiplication ou division avec des nombres qu'il a fallu mesurer. Mais alors, on devrait tenir compte de l'imperfection des instruments.

Avec un mètre, sur une petite longueur, on ne peut espérer, dans la pratique, mesurer avec une plus grande approximation que cêlle *de un milimètre*, et encore est-ce là un résultat rarement atteint.

Avec une chaîne d'arpenteur, on fait facilement des erreurs analogues, soit de *un mètre par kilomètre*. Ainsi, la troisième décimale n'est jamais exacte.

Or, il est facile de montrer par la théorie des erreurs relatives, qu'en prenant π par exemple avec 4 décimales, une de plus que dans les longueurs mesurées, on a encore l'approximation du millimètre par mètre ; 5 décimales ne donneraient qu'une approximation illusoire ; on ferait tout aussi bien d'écrire les décimales au hasard à partir de la quatrième.

C'est donc par une pure habitude ou par un respect enfantin pour des traditions grotesques que les architectes, les ingénieurs, et.., quelques autres, tiennent à

se servir en pratique des Tables de Logarithmes à plus de 5 décimales.

Ces réflexions s'appliquent pour des raisons analogues aux Tables employées en Trigonométrie où l'on calcule par exemple les cordes qui sous-tendent des arcs. Si ces Tables peuvent être exactes à autant de décimales qu'on le désire, les résultats obtenus dans la plupart des cas sont entachés d'erreurs provenant du fait de nos mesures.

Avec un graphomètre muni d'une graduation secondaire, nommée *vernier*, on arrive à évaluer le dixième de degré. Or, un dixième de degré ne constitue encore qu'une grossière approximation, puisque cela correspond à 1 m, 74 vu à 1000 mètres.

Dans les théodolites, on apprécie facilement la minute d'arc et parfois le dixième de minute qui correspond environ à 3 centimètres vus à une distance de 1 kilomètre.

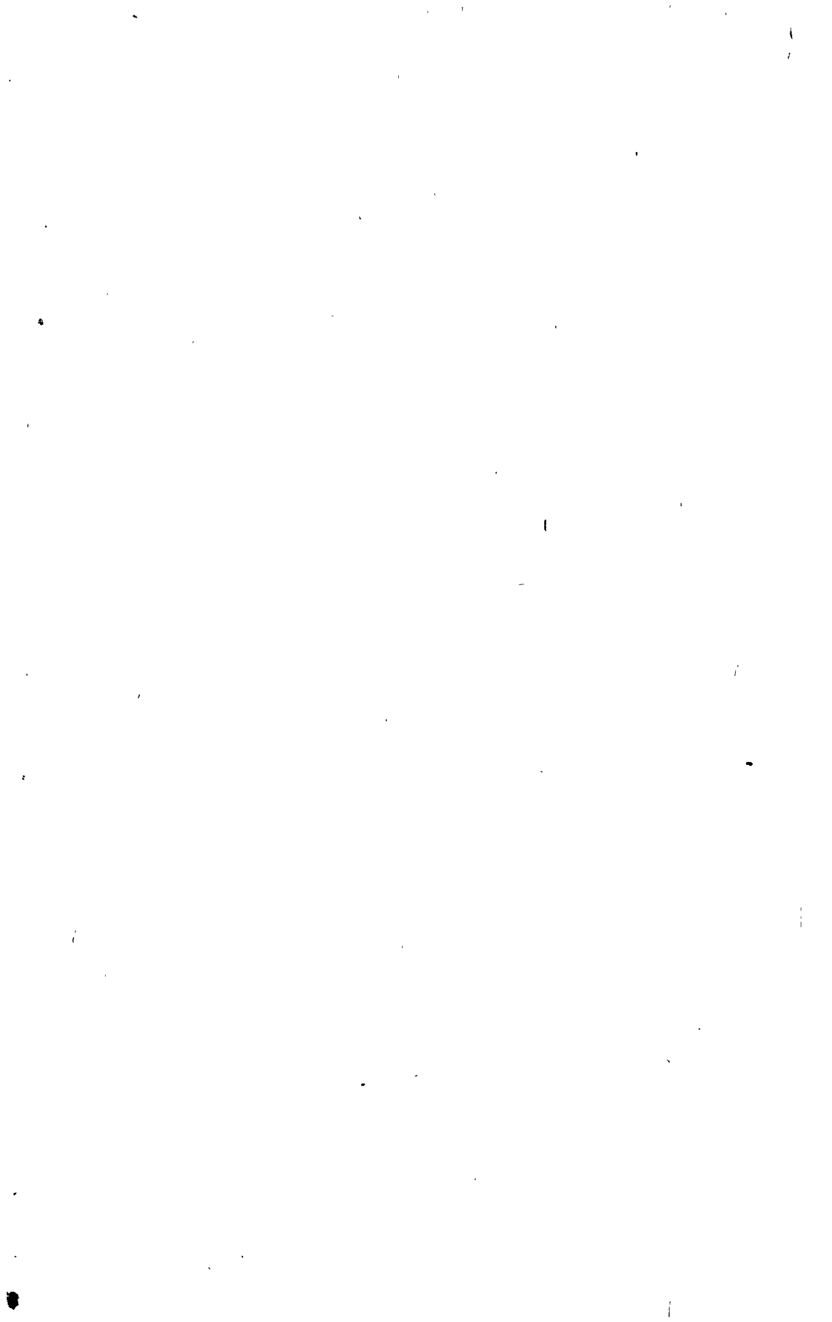
Avec les grands instruments d'astronomie, on ne réalise encore qu'une approximation de un dixième de seconde, ce qui peut donner 1/2 millimètre d'erreur à 1000 mètres, mais nous avons actuellement des moyens indirects pour évaluer des quantités plus petites. De toute manière, on voit par ces exemples que le choix des décimales dans les Tables, doit toujours être approprié aux moyens qu'on emploie.



LONGUEURS DES ARCS, CORDES ET FLÈCHES

POUR DES ANGLES DE 1 A 180 DEGRÉS

(Le rayon étant 1)



Angles en degrés	Arcs	Cordes	Flèches
1	0,01745	0.0175	0.00004
2	0 03490	0 0349	0 00015
3	0 05236	0 0524	0 00034
4	0 06981	0 0698	0 00061
5	0 08726	0 0872	0 00095
6	0 10472	0 1047	0 00137
7	0 12217	0 1221	0 00187
8	0 13962	0 1395	0 00244
9	0 15708	0 1569	0 00308
10	0 17453	0 1743	0 00381
11	0 19198	0 1917	0 00460
12	0 20944	0 2091	0 00548
13	0 22689	0 2264	0 00643
14	0 24434	0 2437	0 00746
15	0 26180	0 2611	0 00856
16	0 27925	0 2783	0 00974
17	0 29670	0 2956	0 01098
18	0 31416	0 3129	0 01231
19	0 33161	0 3301	0 01371
20	0 34906	0 3473	0 01519
21	0 36652	0 3645	0 01675
22	0 38397	0 3816	0 01837
23	0 40142	0 3987	0 02008
24	0 41888	0 4158	0 02185
25	0 43633	0 4329	0 02370
26	0 45378	0 4499	0 02563
27	0 47124	0 4669	0 02763
28	0 48869	0 4838	0 02970
29	0 50614	0 5008	0 03185
30	0 52360	0 5176	0 03407
31	0 54105	0 5345	0 03637
32	0 55850	0 5513	0 03874
33	0 57596	0 5680	0 04118
34	0 59341	0 5847	0 04370
35	0 61086	0 6014	0 04628
36	0 62832	0 6180	0 04894
37	0 64577	0 6346	0 05168

Angles en degrés	Arcs	Cordes	Flèches
38	0,66322	0,6541	0,05448
39	0 68068	0 6676	0 05736
40	0 69813	0 6840	0 06031
41	0 71558	0 7004	0 06333
42	0 73304	0 7167	0 06642
43	0 75049	0 7330	0 06958
44	0 76794	0 7492	0 07281
45	0 78540	0 7654	0 07612
46	0 80285	0 7815	0 0795
47	0 82030	0 7975	0 0829
48	0 83776	0 8135	0 0865
49	0 85521	0 8294	0 0900
50	0 87266	0 8452	0 0937
51	0 89012	0 8610	0 0974
52	0 90757	0 8767	0 1012
53	0 92 02	0 8924	0 1051
54	0 94247	0 9080	0 1090
55	0 95993	0 9235	0 1130
56	0 97738	0 9389	0 1171
57	0 99483	0 9543	0 1212
58	1 01229	0 9696	0 1254
59	1 02974	0 9848	0 1296
60	1 04719	1 0000	0 1340
61	1 06465	1 0154	0 1384
62	1 08210	1 0301	0 1428
63	1 09955	1 0450	0 1474
64	1 11701	1 0598	0 1520
65	1 13446	1 0746	0 1566
66	1 15191	1 0893	0 1613
67	1 16937	1 1039	0 1661
68	1 18682	1 1184	0 1710
69	1 20427	1 1328	0 1759
70	1 22173	1 1472	0 1808
71	1 23918	1 1614	0 1859
72	1 25663	1 1756	0 1910
73	1 27409	1 1896	0 1961

Angles en degés	Arcs	Codes	Flèches
74	1,29154	1,2036	0,2014
75	1 30899	1 2175	0 2066
76	1 32645	1 2313	0 2120
77	1 34390	1 2450	0 2174
78	1 36135	1 2586	0 2229
79	1 37881	1 2722	0 2284
80	1 39626	1 2856	0 2340
81	1 41371	1 2989	0 2396
82	1 43117	1 3121	0 2453
83	1 44862	1 3252	0 2510
84	1 46607	1 3383	0 2569
85	1 48353	1 3512	0 2627
86	1 50098	1 3640	0 2686
87	1 51843	1 3767	0 2746
88	1 53589	1 3[illegible]93	0 2807
89	1 55334	1 4018	0 2867
90	1 57079	1 4142	0 2929
91	1 58825	1 4265	0 2991
92	1 60570	1 4387	0 3053
93	1 62315	1 4507	0 3116
94	1 64061	1 4627	0 3180
95	1 65806	1 4745	0 3244
96	1 67551	1 4863	0 3309
97	1 69297	1 4979	0 3374
98	1 71042	1 5094	0 3439
99	1 72787	1 5208	0 3506
100	1 74533	1 5321	0 3572
101	1 76278	1 5432	0 3639
102	1 78023	1 5543	0 3707
103	1 79769	1 5652	0 3775
104	1 81514	1 5760	0 3843
105	1 83259	1 5867	0 3912
106	1 85005	1 5973	0 3982
107	1 86750	1 6077	0 4052
108	1 88495	1 6180	0 4122
109	1 90241	1 6282	0 4193
110	1 91986	1 6383	0 4264

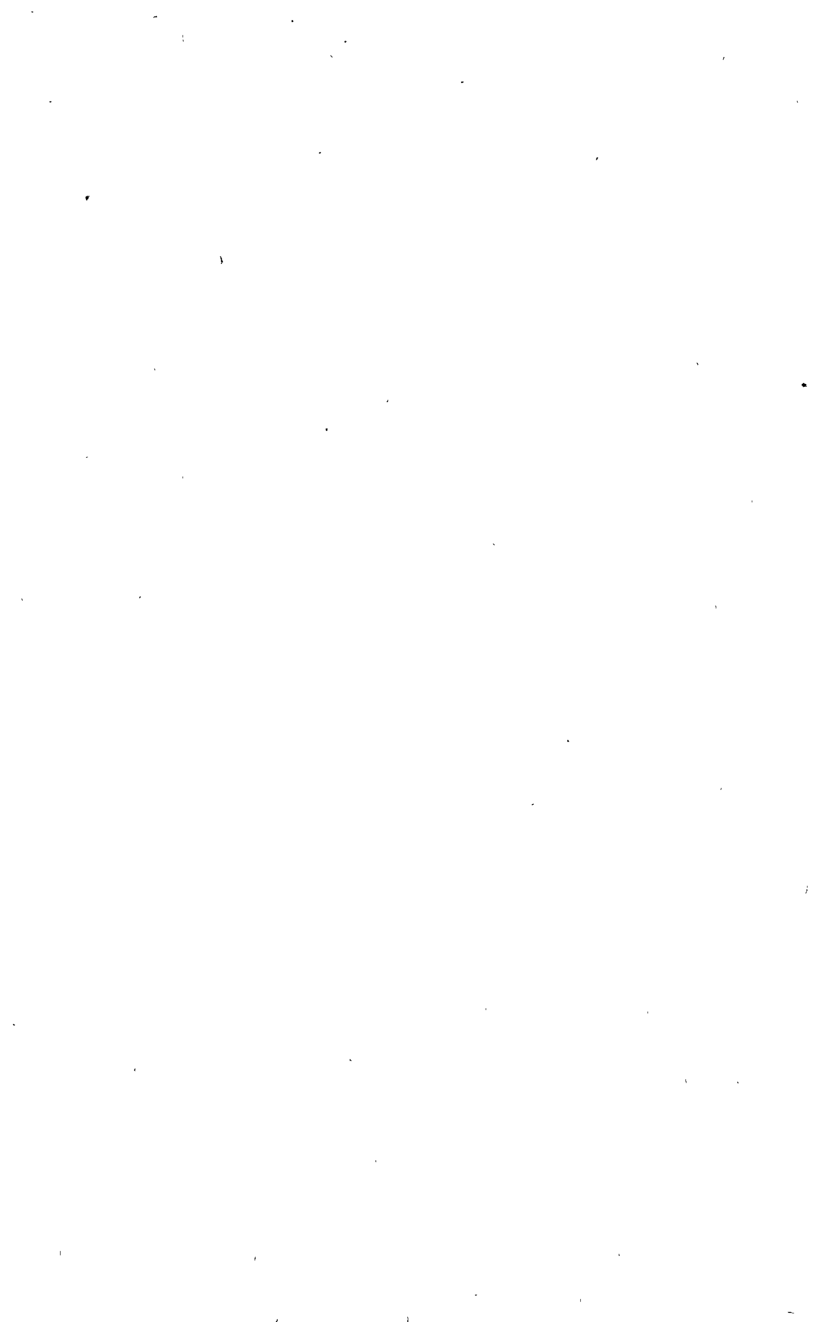
Angles en degrés	Arcs	Cordes	Flèches
111	1,93731	1,6483	0,4336
112	1 95477	1 6581	0 4408
113	1 97222	1 6678	0 4481
114	1 98967	1 6773	0 4554
115	2 00713	1 6868	0 4627
116	2 02458	1 6961	0 4701
117	2 04203	1 7053	0 4775
118	2 05949	1 7143	0 4850
119	2 07694	1 7233	0 4925
120	2 09439	1 7321	0 5000
121	2 11185	1 7407	0 5076
122	2 12230	1 7492	0 5152
123	2 14675	1 7576	0 5228
124	2 16421	1 7659	0 5305
125	2 18166	1 7740	0 5382
126	2 19911	1 7820	0 5460
127	2 21657	1 7899	0 5538
128	2 23402	1 7976	0 5616
129	2 25147	1 8052	0 5695
130	2 26893	1 8126	0 5774
131	2 28638	1 8199	0 5853
132	2 30383	1 8271	0 5933
133	2 32128	1 8341	0 6013
134	2 32874	1 8410	0 6093
135	2 35619	1 8478	0 6173
136	2 37364	1 8544	0 6254
137	2 39110	1 8608	0 6335
138	2 40855	1 8672	0 6416
139	2 42600	1 8733	0 6498
140	2 44346	1 8794	0 6580
141	2 46091	1 8853	0 6662
142	2 47836	1 8910	0 6744
143	2 49582	1 8966	0 6827
144	2 51327	1 9021	0 6910
145	2 53072	1 9074	0 6993
146	2 54818	1 9126	0 7076
147	2 56563	1 9176	0 7160

Angles en degrés	Arcs	Cordes	Flèches
148	2,58308	1,9225	0,7244
149	2 60054	1 9273	0 7328
150	2 61799	1 9319	0 7412
151	2 63544	1 9363	0 7496
152	2 65290	1 9406	0 7581
153	2 67035	1 9447	0 7666
154	2 68780	1 9487	0 7750
155	2 70526	1 9526	0 7836
156	2 72271	1 9563	0 7921
157	2 74016	1 9598	0 8006
158	2 75762	1 9633	0 8092
159	2 77507	1 9665	0 8178
160	2 79252	1 9696	0 8264
161	2 80998	1 9726	0 8350
162	2 82743	1 9754	0 8436
163	2 84488	1 9780	0 8522
164	2 86234	1 9805	0 8608
165	2 87979	1 9829	0 8695
166	2 89724	1 9851	0 8781
168	2 91470	1 9871	0 8868
167	2 93215	1 9890	0 8955
169	2 94960	1 9908	0 9042
170	2 96706	1 9924	0 9128
171	2 98451	1 9938	0 9215
172	3 00196	1 9950	0 9302
173	3 01942	1 9963	0 9390
174	3 03687	1 9973	0 9477
175	3 05432	1 9981	0 9564
176	3 07178	1 9988	0 9651
177	3 08923	1 9993	0 9738
178	3 10668	1 9997	0 9825
179	3 12414	1 9999	0 9913
180	3 14159	2 0000	1 0000



VALEUR DES CIRCONFÉRENCES ET DES SURFACES

EN FONCTION DES RAYONS ET DES DIAMÈTRES



Rayons	Diam.	Circonférences	Surfaces	Rayons	Diam.	Circonférences	Surfaces
0,5	1	3,142	0,785398	19	38	119,381	1134,1149
1	2	6 283	3 1416	19 5	39	122 522	1194 5906
1 5	3	9 425	7 0685	20	40	125 664	1256 6370
2	4	12 566	12 5663				
2 5	5	15 708	19 6349	20 5	41	128 805	1320 2543
3	6	18 850	28 2743	21	42	131 947	1385 4423
3 5	7	21 991	38 4845	21 5	43	135 088	1452 2012
4	8	25 133	50 2654	22	44	138 230	1520 5308
4 5	9	28 274	63 6172	22 5	45	141 372	1590 4313
5	10	31 416	78 5398	23	46	144 513	1661 9025
				23 5	47	147 655	1734 9445
5 5	11	34 558	95 0331	24	48	150 796	1809 5573
6	12	37 699	113 0973	24 5	49	153 938	1885 7410
6 5	13	40 841	132 7322	25	50	157 080	1963 4954
7	14	43 982	153 9380				
7 5	15	47 124	176 7145	25 5	51	160 221	2042 8206
8	16	50 265	201 0619	26	52	163 363	2123 7166
8 5	17	53 407	226 9800	26 5	53	166 504	2206 1834
9	18	56 549	254 4690	27	54	169 646	2290 2210
9 5	19	59 690	283 5287	27 5	55	172 788	2375 8294
10	20	62 832	314 1592	28	56	175 929	2463 0086
				28 5	57	179 071	2551 7586
10 5	21	65 973	346 3605	29	58	182 212	2642 0794
11	22	69 115	380 1327	29 5	59	185 354	2733 9710
11 5	23	72 257	415 4756	30	60	188 496	2827 4334
12	24	75 398	452 3893				
12 5	25	78 540	490 8738	30 5	61	191 637	2922 4665
13	26	81 681	530 9291	31	62	194 779	3019 0705
13 5	27	84 823	572 5552	31 5	63	197 920	3117 2453
14	28	87 965	615 7521	32	64	201 062	3216 9908
14 5	29	91 106	660 5198	32 5	65	204 204	3318 3072
15	30	94 248	706 8583	33	66	207 345	3421 1944
				33 5	67	210 487	3525 6523
15 5	31	97 389	754 7676	34	68	213 628	3631 6811
16	32	100 531	804 2477	34 5	69	216 770	3739 2806
16 5	33	103 673	885 2986	35	70	219 911	3848 4510
17	34	106 814	907 9202				
17 5	35	109 956	962 1129	35 5	71	223 053	3959 1921
18	36	113 097	1017 8760	36	72	226 195	4071 5040
18 5	37	116 239	1075 2101	36 5	73	229 336	4185 3868

Rayons	Diam.	Circonférences	Surfaces	Rayons	Diam.	Circonférences	Surfaces
37	74	232,478	4300.8403	55 5	111	348,717	9676,8908
37 5	75	235 619	4417 8646	56	112	351 858	9852 0346
38	76	238 761	4586 4598	56 5	113	355 000	10028 749
38 5	77	241 903	4656 6257	57	114	358 142	10207 034
39	78	245 044	4778 3624	57 5	115	361 283	10386 890
39 5	79	248 186	4901 6699	58	116	364 425	10568 317
40	80	251 327	5026 5482	58 5	117	367 566	10751 315
				59	118	370 708	10935 884
40 5	81	254 469	5152 9973	59 5	119	373 849	11122 023
41	82	257 611	5281 0172	60	120	376 991	11309 736
41 5	83	260 752	5410 6079				
42	84	263 894	5541 7694	60 5	121	380 133	11499 014
42 5	85	267 035	5574 5017	61	122	383 274	11689 866
43	86	270 117	5808 8048	61 5	123	386 416	11882 289
43 5	87	273 319	5944 6787	62	124	389 557	12076 282
44	88	276 460	6082 1233	62 5	125	392 699	12271 846
44 5	89	279 602	6221 1388	63	126	395 841	12468 981
45	90	282 743	6361 7251	63 5	127	398 982	12667 687
				64	128	402 124	12867 963
45 5	91	285 885	6503 8822		129	405 265	13069 811
46	92	289 027	6647 6100	64 5	130	408 407	13273 229
46 5	93	292 168	6792 9087	65			
47	94	295 310	6939 7781	65 5	131	411 549	13478 218
47 5	95	298 451	7088 2184	66	132	414 690	13684 777
48	96	301 593	7238 2294	66 5	133	417 832	13892 908
48 5	97	304 734	7389 8113	67	134	420 973	14102 609
49	98	307 876	7542 9639	67 5	135	424 115	14313 881
49 5	99	311 018	7697 6874	68	136	427 257	14526 724
50	100	314 159	7853 9816	68 5	137	430 398	14741 138
				69	138	433 540	14957 122
50 5	101	317 301	8011 8467	69 5	139	436 681	15174 678
51	102	320 442	8171 2825	70	140	439 823	15393 804
51 5	103	323 584	8332 2891				
52	104	326 726	8494 8665	70 5	141	442 965	15614 501
52 5	105	329 867	8659 0147	71	142	446 106	15836 768
53	106	333 009	8824 7338	71 5	143	449 248	16060 607
53 5	107	336 150	8992 0236	72	144	452 389	16286 016
54	108	339 292	9160 8842	72 5	145	455 531	16512 996
54 5	109	342 434	9330 3156	73	146	458 673	16741 547
55	110	345 575	9503 3178	73 5	147	461 814	16971 669

Rayons	Diam.	Circonférences	Surfaces
74	148	464,956	17203,361
74 5	149	468 097	17436 024
75	150	471 239	17671 458
75 5	151	474 381	17907 863
76	152	477 522	18145 839
76 5	153	480 664	18385 385
77	154	483 805	18626 503
77 5	155	486 947	18869 191
78	156	490 088	19113 449
78 5	157	493 230	19359 279
79	158	496 372	19606 679
79 5	159	499 513	19855 651
80	160	502 655	20106 193
80 5	161	505 796	20358 306
81	162	508 938	20611 989
81 5	163	512 080	20867 244
82	164	515 221	21124 069
82 5	165	518 363	21382 465
83	166	521 504	21642 431
83 5	167	524 646	21903 969
84	168	527 788	22167 077
84 5	169	530 929	22431 757
85	170	534 071	22698 007
85 5	171	537 212	22965 827
86	172	540 354	23235 219
86 5	173	543 496	22506 181
87	174	546 637	23778 715
87 5	175	549 779	24052 818
88	176	552 920	24328 493
88 5	177	556 062	24605 793
89	178	559 203	24884 555
89 5	179	562 344	25164 942
90	180	565 487	25446 900
90 5	181	568 628	25730 429
91	182	571 770	26015 529
91 5	183	574 911	26302 199

Rayons	Diam	Circonférences	Surfaces
92	184	578,053	26590,440
92,5	185	581 195	26880 252
93	186	584 336	27171 635
93 5	187	587 478	27464 588
94	188	590 619	27759 112
94 5	189	593 761	28055 207
95	190	596 903	28352 878
95 5	191	600 044	28652 110
96	192	603 186	28952 918
96 5	193	606 327	29255 296
97	194	609 469	29559 245
97 5	195	612 611	29864 765
98	196	615 752	30171 856
98 5	197	618 894	30480 517
99	198	622 035	30790 749
99 5	199	625 177	31102 552
100	200	628 319	31415 926
100 5	201	631 460	31730 871
101	202	634 602	32047 386
101 5	203	637 743	32365 473
102	204	640 885	32685 130
102 5	205	644 026	33006 358
103	206	647 168	33329 156
103 5	207	650 310	33653 526
104	208	653 451	33979 466
104 5	209	656 593	34306 977
105	210	659 734	34636 059
105 5	211	662 876	34966 711
106	212	666 018	35298 935
106 5	213	669 159	35632 729
107	214	672 301	35908 094
107 5	215	675 442	36305 030
108	216	678 584	36643 614
108 5	217	681 726	36983 614
109	218	684 867	37325 262
109 5	219	688 009	37668 481
110	220	691 150	38013 271

Rayons	Diam.	Circonférences	Surfaces	Rayons	Diam.	Circonférences	Surfaces
110,5	221	694,292	38359,631	129	258	810,351	52279,243
111	222	697 434	38707 563	129 5	259	813 673	52685 294
111 5	223	700 575	39057 065	130	260	816 814	53092 919
112	224	703 717	39408 138				
112 5	225	706 858	39760 782	130 5	261	819 956	53502 108
113	226	710 000	40114 996	131	262	823 097	53912 871
113 5	227	713 142	40470 782	131 5	263	826 239	54325 205
114	228	716 283	40828 138	132	264	829 380	54239 110
114 5	229	719 425	41187 065	132 5	265	832 522	55154 586
115	230	722 566	41547 563	133	266	835 664	55571 632
				133 5	267	838 805	55990 249
115 5	231	725 708	41909 631	134	268	841 947	56410 437
116	232	728 850	42273 271	134 5	269	845 088	56832 196
116 5	233	731 991	42638 841	135	270	848 230	57255 526
117	234	735 133	43005 262				
117 5	235	738 274	43373 613	135 5	271	851 372	57680 426
118	236	741 416	43743 536	136	272	854 513	58106 897
118 5	237	744 557	44115 029	136 5	273	857 655	58534 939
119	238	747 690	44488 093	137	274	860 796	58964 552
119 5	239	750 841	44862 728	137 5	275	863 938	59395 736
120	240	753 982	45238 934	138	276	867 080	59828 490
				138 5	277	870 221	60262 815
120 5	241	757 124	45616 710	139	278	873 363	60698 711
121	242	760 265	45996 058	139 5	279	876 504	61136 178
121 5	243	763 407	46376 976	140	280	879 646	61575 216
122	244	766 549	46759 465				
122 5	245	769 690	47143 525	140 5	281	882 788	62015 824
123	246	772 832	47529 155	141	282	885 929	62458 003
123 5	247	775 973	47916 356	141 5	283	889 071	62901 753
124	248	779 115	48305 128	142	284	892 212	63347 074
124 5	249	782 257	48695 471	142 5	285	895 354	63793 966
125	250	785 398	49087 385	143	286	898 496	64242 428
				143 5	287	901 637	64692 461
125 5	251	788 540	49480 869	144	288	904 779	65144 065
126	252	791 681	49875 925	144 5	289	907 920	65597 240
126 5	253	794 823	50272 551	145	290	911 062	66051 985
127	254	797 965	50670 748				
127 5	255	801 106	51070 515	145 5	291	914 203	66508 302
128	256	804 248	51471 854	146	292	917 345	66966 189
128 5	257	807 389	51874 763	146 5	293	920 487	67425 647

Rayons	Diam.	Circonférences	Surfaces	Rayons	Diam.	Circonférences	Surfaces
147	294	923,628	67886,675	165,5	331	1039,867	86049 008
147,5	295	926 770	68349 275	166	332	1043 009	86569 727
148	296	929 911	68813 145	166 5	333	1046 150	87092 017
148 5	297	933 053	69279 186	167	334	1049 292	87615 877
149	298	936 195	69746 498	167 5	335	1052 434	88141 309
149 5	299	939 336	70215 381	168	336	1055 575	88668 311
150	300	942 478	70685 834	168 5	337	1058 717	89196 884
150 5	301	945 610	71157 859	169	338	1061 858	89727 028
151	302	948 761	71631 454	169 5	339	1065 000	90258 742
151 5	803	551 903	72106 620	170	340	1068 142	90792 027
152	304	955 044	72583 356	170 5	341	1071 283	91326 884
152 5	305	958 186	73061 664	171	342	1074 425	91863 311
153	306	961 327	73541 542	171 5	343	1077 566	92401 308
153 5	307	964 469	74022 991	172	344	1080 708	92940 877
154	308	967 611	74506 011	172 5	345	1083 849	93482 016
154 5	309	970 752	74990 602	173	346	1086 991	94024 726
155	310	973 894	75476 763	173 5	347	1090 133	94569 007
155 5	311	977 035	75964 496	174	348	1093 274	95114 859
156	312	980 177	76453 799	174 5	349	1096 416	95662 281
156 5	313	983 318	76944 672	175	350	1099 557	96211 275
157	314	986 460	77437 117	175 5	351	1102 699	96761 839
157 5	315	989 602	77931 133	176	352	1105 841	97318 974
158	316	992 743	78426 719	176 5	353	1108 982	97867 680
158 5	317	995 884	78923 876	177	354	1112 124	98422 956
159	318	999 026	79422 604	177 5	355	1115 265	98979 803
159 5	319	1002 168	79922 902	178	356	1118 407	99538 221
160	320	1005 310	80424 772	178 5	357	1121 549	100098 21
160 5	321	1008 451	80918 212	179	358	1124 690	100659 77
161	322	1011 593	81433 223	179 5	359	1127 832	101222 90
161 5	323	1014 734	81939 805	180	360	1130 973	101787 60
162	324	1017 876	82447 957	180 5	361	1134 115	102353 87
162 5	325	1021 018	82957 681	181	362	1137 257	102921 72
163	326	1024 159	83468 975	181 5	363	1140 398	103491 13
163 5	327	1027 301	83981 840	182	364	1143 540	104062 12
164	328	1030 442	84496 276	182 5	365	1146 681	104634 67
164 5	329	1033 584	85012 282	183	366	1149 823	105208 80
165	330	1036 726	85529 860	183 5	367	1152 965	105784 49

Rayons	Diam.	Circonférences	Surfaces
184	368	1156,106	106361,76
184 5	369	1159 248	106940 60
185	370	1162 389	107521 01
185 5	371	1165 531	108102 99
186	372	1168 672	108686 54
186 5	373	1171 814	109271 66
187	374	1174 956	109858 35
187 5	375	1178 097	110446 62
188	376	1181 239	111036 45
188 5	377	1184 380	111627 86
189	378	1187 522	112220 83
189 5	379	1190 664	112815 38
190	380	1193 805	113411 49
190 5	381	1196 947	114009 18
191	382	1200 088	114608 44
191 5	383	1203 230	115209 27
192	384	1206 372	115811 67
192 5	385	1209 513	116415 64
193	386	1212 655	117021 48
193 5	387	1215 796	117628 30
194	388	1218 938	118236 98
194 5	389	1222 080	118847 24
195	390	1225 221	119459 06
195 5	391	1228 363	120072 46
196	392	1231 504	120687 42
196 5	393	1234 646	121303 96
197	394	1237 788	121922 07
197 5	395	1240 929	122541 75
198	396	1244 071	123163 00
198 5	397	1247 212	123785 82
199	398	1250 354	124410 21
199 5	399	1253 495	125036 17
200	400	1256 637	125663 71
200 5	401	1259 779	126292 81
201	402	1262 920	126923 48
201 5	403	1266 062	127555 73
202	404	1269,203	128189,55
202 5	405	1272 345	128824 93
203	406	1275 487	129461 89
203 5	407	1278 628	130100 42
204	408	1281 770	130740 52
204 5	409	1284 911	131382 19
205	410	1288 053	132025 43
205 5	411	1291 195	132670 24
206	412	1294 336	133316 63
206 5	413	1297 478	133964 58
207	414	1300 619	134614 10
207 5	415	1303 761	135265 20
208	416	1306 903	135917 86
208 5	417	1310 044	136572 10
209	418	1313 186	137227 91
209 5	419	1316 327	137885 29
210	420	1319 469	138544 24
210 5	421	1322 611	139204 76
211	422	1325 752	139866 85
211 5	423	1328 894	140530 61
212	424	1332 035	141195 74
212 5	425	1335 177	141862 54
213	426	1338 318	142530 92
213 5	427	1341 460	143200 86
214	428	1344 602	143872 38
214 5	429	1347 743	144545 46
215	430	1350 885	145220 12
215 5	431	1354 026	145896 35
216	432	1357 168	146574 15
216 5	433	1360 310	147253 52
217	434	1363 451	147934 46
217 5	435	1366 593	148616 97
218	436	1369 734	149301 05
218 5	437	1372 876	149986 70
219	438	1376 018	150673 93
219 5	439	1379 159	151362 72
220	440	1382 301	152053 08

Rayons	Diam.	Circonférences	Surfaces	Rayons	Diam.	Circonférences	Surfaces
220,5	441	1385,442	152745,02	239	478	1501,681	179450,91
221	442	1388 584	153438 53	239 5	479	1504 823	180202 54
221 5	443	1391 726	154133 60	240	480	1507 964	180955 74
222	444	1394 867	154830 25				
222 5	445	1398 009	155528 47	240 5	481	1511 106	181710 50
223	446	1401 150	156228 26	241	482	1514 248	182466 84
223 5	447	1404 292	156929 62	241 5	483	1517 389	183224 75
224	448	1407 434	157632 55	242	484	1520 531	183984 23
224 5	449	1410 575	158337 06	242 5	485	1523 672	184745 28
225	450	1413 717	159043 13	243	486	1526 814	185507 90
				243 5	487	1529 956	186272 10
225 5	451	1416 858	159750 77	244	488	1533 097	187037 86
226	452	1420 000	160459 99	244 5	489	1536 239	187805 19
226 5	453	1423 141	161170 77	245	490	1539 380	188574 10
227	454	1426 283	161883 13				
227 5	455	1429 425	162597 06	245 5	491	1542 522	189344 57
228	456	1432 566	163312 55	246	492	1545 664	190116 62
228 5	457	1435 708	164029 62	246 5	493	1548 805	190890 24
229	458	1438 849	164748 26	247	494	1551 947	191665 43
229 5	459	1441 991	165468 47	247 5	495	1555 088	192442 19
230	460	1445 133	166190 25	248	496	1558 230	193320 51
				248 5	497	1561 372	194000 42
230 5	461	1448 274	166913 60	249	498	1564 513	194781 89
231	462	1451 416	167638 53	249 5	499	1567 655	195564 93
231 5	463	1454 557	168365 02	250	500	1570 796	196349 54
232	464	1457 699	169093 08				
232 5	465	1460 841	169822 72	250 5	501	1573 938	197135 72
233	466	1463 982	170553 92	251	502	1577 080	197923 48
233 5	467	1467 124	171286 70	251 5	503	1580 221	198712 80
234	468	1470 265	172021 05	252	504	1583 363	199503 70
234 5	469	1473 407	172756 97	252 5	505	1586 504	200296 17
235	470	1476 549	173494 45	253	506	1589 646	201090 20
				253 5	507	1592 787	201885 81
235 5	471	1479 690	174233 51	254	508	1595 929	202682 99
236	472	1482 832	174974 14	254 5	509	1599 071	203481 74
236 5	473	1485 973	175716 35	255	510	1602 212	204282 06
237	474	1489 115	176460 12				
237 5	475	1492 257	177205 46	255 5	511	1605 354	205083 95
238	476	1495 398	177952 37	255	512	1608 495	205887 42
238 5	477	1498 540	178700 86	256 5	513	1611 637	206692 45

Rayons	Diam.	Circonférences	Surfaces	Rayons	Diam.	Circonférences	Surfaces
257	514	1614,779	207499,05	275,5	551	1731,018	238447,67
257 5	515	1617 920	208307 23	276	552	1734 159	239313 96
258	516	1621 062	209116 97	276 5	553	1737 301	240181 43
258 5	517	1624 203	209928 29	277	554	1740 442	241051 26
259	518	1627 345	210741 18	277 5	555	1743 584	241922 27
259 5	519	1630 487	211555 63	278	556	1746 726	242794 85
260	520	1633 628	212371 66	278 5	557	1749 867	243668 99
260 5	521	1636 770	213189 26	279	558	1753 009	244544 61
261	522	1639 911	214008 43	279 5	559	1756 150	245422 00
261 5	523	1643 053	214829 17	280	560	1759 292	246300 86
262	524	1646 195	215651 49	280 5	561	1762 433	247181 30
262 5	525	1649 336	216475 37	281	562	1765 575	248063 30
263	526	1652 478	217300 82	281 5	563	1768 717	248946 87
263 5	527	1655 619	218127 85	282	564	1771 858	249832 01
264	528	1658 761	218956 44	282 5	565	1775 000	250718 73
264 5	529	1661 903	219786 61	283	566	1778 141	251607 01
265	530	1665 044	220618 34	283 5	567	1781 283	252496 87
265 5	531	1668 186	221451 65	284	568	1784 425	253388 30
266	532	1671 327	222286 53	284 5	569	1787 566	254281 30
266 5	533	1674 469	223122 98	285	570	1790 708	255175 86
267	534	1677 610	223961 00	285 5	571	1793 849	256072 00
267 5	535	1680 752	224800 59	286	572	1796 991	256969 71
268	536	1683 894	225641 75	286 5	573	1800 133	257868 99
268 5	537	1687 035	226484 48	287	574	1803 274	258769 85
269	538	1690 177	227328 77	287 5	575	1806 416	259672 27
269 5	539	1693 318	228174 66	288	576	1809 557	260576 26
270	540	1696 460	229022 10	288 5	577	1812 699	261481 83
270 5	541	1699 602	229871 12	289	578	1815 841	262388 96
271	542	1702 743	230721 71	289 5	579	1818 982	263297 67
271 5	543	1705 885	231573 86	290	580	1822 124	264207 94
272	544	1709 030	232427 59	290 5	581	1825 265	265119 79
272 5	545	1712 168	233282 89	291	582	1828 407	266033 21
273	546	1715 310	234139 76	291 5	583	1831 549	266948 20
273 5	547	1718 451	234998 20	292	584	1834 690	267864 76
274	548	1721 593	235858 21	292 5	585	1837 832	268782 89
274 5	549	1724 734	236719 79	293	586	1840 973	269702 59
275	550	1727 876	237582 94	293 5	587	1844 115	270623 86

Rayons	Diam.	Circonférences	Surfaces
294	588	1847,257	271546,70
294 5	589	1850 398	272471 12
295	590	1853 540	273397 10
295 5	591	1856 681	274324 66
296	592	1859 823	275253 78
296 5	593	1862 964	276184 48
297	594	1866 106	277116 75
297 5	595	1869 248	278050 59
298	596	1872 389	278985 99
298 5	597	1875 531	279922 97
299	598	1878 672	280861 53
299 5	599	1881 814	281801 65
300	600	1884 956	282743 34
300 5	601	1888 097	283686 60
301	602	1891 239	284631 44
301 5	603	1894 380	285577 84
302	604	1897 522	286525 82
302 5	605	1900 646	287475 36
303	606	1903 805	288426 48
303 5	607	1906 947	289379 17
304	608	1910 088	290333 43
304 5	609	1913 230	291289 26
305	610	1916 372	292246 66
305 5	611	1919 513	293205 63
306	612	1922 655	294166 17
306 5	613	1925 796	295128 28
307	614	1928 938	296091 97
307 5	615	1932 080	297057 22
308	616	1935 221	298024 05
308 5	617	1938 363	298992 44
309	618	1941 504	299962 41
309 5	619	1944 646	300933 95
310	620	1947 787	301907 05
310 5	621	1950 929	302881 73
311	622	1954 071	303857 98
311 5	623	1957 212	304835 80
312	624	1960,354	305815,20
312 5	625	1963 495	306736 16
313	626	1966 637	307778 69
313 5	627	1969 779	308762 79
314	628	1972 920	309748 47
314 5	629	1976 062	310735 71
315	630	1979 203	311724 53
315 5	631	1982 345	312714 92
316	632	1985 487	313706 88
316 5	633	1988 628	314700 40
317	634	1991 770	315695 50
317 5	635	1994 911	316692 17
318	636	1998 053	317690 42
318 5	637	2001 195	318690 23
319	638	2004 336	3 9691 61
319 5	639	2007 478	320694 56
320	640	2010 619	321699 09
320 5	641	2013 761	322705 18
321	642	2016 902	323712 85
321 5	643	2020 044	324722 09
322	644	2023 186	325732 89
322 5	645	2026 327	326745 27
323	646	2029 469	327759 22
323 5	647	2032 610	328774 74
324	648	2035 752	329791 83
324 5	649	2038 894	330810 49
325	650	2042 035	331830 72
325 5	651	2045 177	332825 53
326	652	2048 318	333875 90
326 5	653	2051 460	334900 85
327	654	2054 602	335927 36
327 5	655	2057 743	336955 45
328	656	2060 885	337985 10
328 5	657	2064 026	339016 33
329	658	2067 168	340049 13
329 5	659	2070 310	341083 50
330	660	2073 451	342119 44

Rayons	Diam.	Circonférences	Surfaces
330,5	661	2076,593	343156,95
331	662	2079 734	344196 03
331 5	663	2082 876	345236 69
332	664	2086 018	346278 91
332 5	665	2089 159	347322 70
333	666	2092 301	348368 07
333 5	667	2095 442	349445 00
334	668	2098 584	350463 51
334 5	669	2101 725	351513 59
335	670	2104 867	352265 24
335 5	671	2108 009	353618 45
336	672	2111 150	354673 24
336 5	673	2114 292	355729 60
337	674	2117 433	356787 54
337 5	675	2120 275	357847 04
338	676	2123 717	358908 11
338 5	677	2126 858	359970 75
339	678	2130 000	361034 97
339 5	679	2133 141	362100 75
340	680	2136 283	363168 11
340 5	681	2139 425	364237 04
341	682	2142 566	365307 54
341 5	683	2145 708	366379 60
342	684	2148 849	367453 24
342 5	685	2151 991	368528 45
343	686	2155 133	369605 23
343 5	687	2158 274	370683 59
344	688	2161 416	371763 51
344 5	689	2164 557	372845 00
345	690	2167 699	373928 07
345 5	691	2170 841	375012 70
346	692	2173 982	376098 91
346 5	693	2177 124	377186 68
347	694	2180 265	378276 03
347 5	695	2183 407	379366 95
348	696	2186 549	380459 44
348 5	697	2189 690	381553 50

Rayons	Diam.	Circonférences	Surfaces
349	698	2192,832	382040,43
349 5	699	2195 973	383740 33
350	700	2199 115	384845 10
350 5	701	2202 256	385945 44
351	702	2205 398	387047 36
351 5	703	2208 540	388150 84
352	704	2211 681	389255 90
352 5	705	2214 823	390362 52
353	706	2217 964	391470 72
353 5	707	2221 106	392580 49
354	708	2224 248	393691 83
354 5	709	2227 389	394804 74
355	710	2230 531	395919 21
355 5	711	2233 672	397035 27
356	712	2236 814	398152 89
356 5	713	2239 956	399272 08
357	714	2243 097	400392 84
357 5	715	2246 239	401515 18
358	716	2249 380	402639 08
358 5	717	2252 522	403764 56
359	718	2255 664	404891 60
359 5	719	2258 805	406020 22
360	720	2261 947	407150 41
360 5	721	2265 088	408282 17
361	722	2268 230	409415 50
361 5	723	2271 371	410450 40
362	724	2274 513	411686 87
362 5	725	2277 655	412824 91
363	726	2280 796	413964 52
363 5	727	2283 938	415105 71
364	728	2287 079	416248 46
364 5	729	2290 221	417392 79
365	730	2293 363	418538 68
365 5	731	2296 504	419686 15
366	732	2299 646	420835 19
366 5	733	2302 787	421985 79

Rayons	Diam.	Circonférences	Surfaces	Rayons	Diam	Circonférences	Surfaces
367	734	2305,929	423137,97	385,5	771	2422,168	466872,87
367 5	735	2309 071	424291 72	386	772	2425 310	468084 74
368	736	2312 212	425447 04	386 5	773	2428 451	469298 18
368 5	737	2315 354	426603 93	387	774	2431 593	470513 19
369	738	2318 495	427762 40	387 5	775	2434 734	471729 77
369 5	739	2321 637	428922 43	388	776	2437 876	472947 92
370	740	2324 779	430084 03	388 5	777	2441 018	474167 65
370 5	741	2327 920	431247 21	389	778	2444 159	475388 94
371	742	2331 062	432411 95	389 5	779	2447 301	466611 81
371 5	743	2334 203	433578 27	390	780	2450 442	477836 24
372	744	2337 345	434746 16	390 5	781	2453 584	479062 25
372 5	745	2340 487	435915 62	391	782	2456 725	480289 83
373	746	2343 628	437086 64	391 5	783	2459 867	481518 97
373 5	747	2346 770	438259 24	392	784	2463 009	482749 69
374	748	2349 911	439433 41	392 5	785	2466 150	483981 98
374 5	749	2353 053	430609 16	393	786	2469 292	485215 84
375	750	2356 195	441786 47	393 5	787	2472 433	486451 28
375 5	751	2359 336	442965 35	394	788	2475 575	487688 28
376	752	2362 478	444145 80	394 5	789	2478 717	488926 85
376 5	753	2365 619	445327 83	395	790	2481 858	490166 99
377	754	2368 761	446511 42	395 5	791	2485 000	491408 71
377 5	755	2371 902	447696 59	396	792	2488 141	492651 99
378	756	2375 044	448883 32	396 5	793	2491 283	493896 85
378 5	757	2378 186	450071 63	397	794	2494 425	495143 28
379	758	2381 327	451261 51	397 5	795	2497 566	496391 27
379 5	759	2384 469	452452 96	398	796	2500 708	497640 84
380	760	2387 610	453645 98	398 5	797	2503 849	498891 98
380 5	761	2390 752	454840 57	399	798	2506 991	500144 69
381	762	2393 894	456036 73	399 5	799	2510 133	501398 97
381 5	763	2397 035	457234 46	400	800	2513 274	502654 82
382	764	2400 177	458433 77	400 5	801	2516 416	503912 25
382 5	765	2403 318	459634 64	401	802	2519 557	505171 24
383	766	2406 460	460837 08	401 5	803	2522 699	506431 80
383 5	767	2409 602	462041 10	402	804	2525 840	507693 94
384*	768	2412 743	463246 69	402 5	805	2528 982	508957 65
384 5	769	2415 885	464453 84	403	806	2532 124	510222 92
385	770	2419 026	465662 57	403 5	807	2535 265	514489 77

Rayons	Diam.	Circonférences	Surfaces
404	808	2538,407	512758,19
404 5	809	2541 548	514028 18
405	810	2544 690	514299 74
405 5	811	2547 832	516572 86
406	812	2550 973	517847 57
406 5	813	2554 115	519123 84
407	814	2557 256	520401 68
407 5	815	2560 398	521681 10
408	816	2563 540	522962 08
408 5	817	2566 681	524244 63
409	818	2569 823	525528 76
409 5	819	2572 964	526814 46
410	820	2576 106	528101 73
410 5	821	2579 248	529390 56
411	822	2582 389	530680 97
411 5	823	2585 531	531972 95
412	824	2588 672	533266 50
412 5	825	2591 814	534561 63
413	826	2594 956	535858 32
413 5	827	2598 097	537156 58
414	828	2601 239	538456 41
414 5	829	2604 380	539757 82
415	830	2607 522	541060 79
415 5	831	2610 664	542365 34
416	832	2613 805	543671 46
416 5	833	2616 947	544979 15
417	834	2620 088	546288 40
417 5	835	2628 230	547599 23
418	836	2626 371	548911 63
418 5	837	2629 513	550225 61
419	838	2632 655	551541 15
419 5	839	2635 796	552858 26
420	840	2638 938	554176 94
420 5	841	2642 079	555497 20
421	842	2645 221	556819 02
421 5	843	2648 363	558142 49

Rayons	Diam.	Circonférences	Surfaces
422	844	2651,504	559467,39
422 5	845	2654 646	560793 92
423	846	2657 787	562122 03
423 5	847	2660 929	563451 71
424	848	2664 071	564782 96
424 5	849	2667 212	566115 78
425	850	2670 354	567450 17
425 5	851	2673 495	568786 14
426	852	2676 637	570123 68
426 5	853	2679 779	571462 77
427	854	2682 920	572803 45
427 5	855	2686 062	574145 69
428	856	2689 203	575489 51
428 5	857	2692 345	576834 90
429	858	2695 486	578181 85
429 5	859	2698 628	579530 38
430	860	2701 770	580880 48
430 5	861	2704 911	582232 15
431	862	2708 053	583585 39
431 5	863	2711 194	584940 21
432	864	2714 336	586296 59
432 5	865	2717 448	587654 54
433	866	2720 619	589014 07
433 5	867	2723 761	590375 16
434	868	2726 902	591737 83
434 5	869	2730 044	593102 06
435	870	2733 186	594467 87
435 5	871	2736 327	595835 25
436	872	2739 469	597204 20
436 5	873	2742 610	598574 72
437	874	2745 752	599946 81
437 5	875	2748 894	601320 47
438	876	2752 035	602695 70
438 5	877	2755 177	604072 50
439	878	2758 318	605450 88
439 5	879	2761 460	606830 82
440	880	2764 602	608212 34

Rayons	Diam.	Circonférences	Surfaces
440,5	881	2767,743	609595,42
441	882	2770 885	610980 08
441 5	883	2774 026	612366 31
442	884	2777 168	613754 11
442 5	885	2780 310	615143 48
443	886	2783 451	616534 42
443 5	887	2786 593	617926 93
444	888	2789 734	619321 01
444 5	889	2792 876	620716 66
445	890	2796 017	622113 89
445 5	891	2799 159	623512 68
446	892	2802 301	624913 04
446 5	893	2805 442	626314 98
447	894	2808 584	627718 49
447 5	895	2811 725	629123 56
448	896	2814 867	630530 21
448 5	897	2818 009	631983 43
449	898	2821 150	633348 22
449 5	899	2824 292	634759 58
450	900	2927 433	636172 51
450 5	901	2830 575	637587 01
451	902	2833 717	639003 09
451 5	903	2836 858	640420 73
452	904	2840 000	641839 95
452 5	905	2843 141	643260 73
453	906	2846 283	644683 09
453 5	907	2849 425	646107 01
454	908	2852 566	647532 51
454 5	909	2855 708	648959 58
455 .	910	2858 849	650388 21
455 5	911	2861 990	651818 43
456	912	2865 133	653250 21
456 5	913	2868 274	654683 56
457	914	2871 416	656118 48
457 5	915	2874 557	657554 98
458	916	2877 699	658993 04
458 5	917	2880 841	660432 68
459	918	2883,982	661873,88
459 5	919	2887 124	663316 66
460	920	2890 265	664761 01
460 5	921	2893 407	666206 92
461	922	2896 548	667654 41
461 5	923	2899 690	669103 47
462	924	2902 832	670554 10
462 5	925	2905 973	672006 30
463	926	2909 115	673460 08
463 5	927	2912 256	674915 42
464	928	2915 398	676372 33
464 5	929	2918 540	677830 82
465	930	2921 681	679290 87
465 5	931	2924 823	680752 50
466	932	2927 964	682215 69
466 5	933	2931 106	683680 46
467	934	2934 248	685146 80
467 5	935	2937 389	686614 71
468	936	2940 531	688084 19
468 5	937	2943 672	689555 24
469	938	2946 814	691027 86
469 5	939	2949 955	692502 05
470	940	2953 097	693977 82
470 5	941	2956 239	695455 15
471	942	2959 380	696934 06
471 5	943	2962 522	698414 53
472	944	2965 663	699896 58
472 5	945	2968 805	701380 20
473	946	2971 947	702865 38
473 5	947	2975 088	704352 14
474	948	2978 230	705840 47
474 5	949	2981 371	707330 37
475	950	2984 513	708821 84
475 5	951	2987 655	710314 88
476	952	2990 796	711809 50
476 5	953	2993 938	713305 68

Rayons	Diam.	Circonférences	Surfaces
477	954	2997,079	714803,43
477 5	955	3000 221	716302 76
478	956	3003 363	717803 66
478 5	957	3006 504	719306 12
479	958	3009 646	720810 16
479 5	959	3012 787	722315 77
480	960	3015 929	723822 95
480 5	961	3019 071	725331 70
481	962	3022 212	726842 02
481 5	963	3025 353	728353 91
482	964	3028 495	729867 37
482 5	965	3031 637	731382 40
483	966	3034 779	732899 01
483 5	967	3037 920	734417 18
484	968	3041 062	735936 93
484 5	969	3044 203	737458 25
485	970	3047 345	738981 13
485 5	971	3050 486	740505 59
486	972	3053 628	742031 62
386 5	973	3056 770	743559 22
487	974	3059 911	745088 39
487 5	975	3063 053	746619 13
488	976	3066 194	748151 44
488 5	977	3069 336	749685 32
489	978	3072,478	751220,78
489 5	979	3075 619	752757 80
490	980	3078 761	754296 40
490 5	981	3081 902	755836 56
491	982	3085 044	757378 30
491 5	983	3088 186	758921 61
492	984	3091 327	760466 48
492 5	985	3094 469	762012 93
493	986	3097 610	763560 95
493 5	987	3100 752	765110 54
494	988	3103 894	766661 71
494 5	989	3107 035	768214 44
495	990	3110 177	769768 74
495 5	991	3113 318	771324 61
496	992	3116 460	772882 06
496 5	993	3119 602	774441 07
497	994	3122 743	776004 66
497 5	995	3125 885	777563 82
498	996	3129 026	779127 54
498 5	997	3132 168	780692 84
499	998	3135 309	782259 71
499 5	999	3138 451	783828 15
500	1000	3141 593	785398 16

TABLE DES MATIÈRES

TABLES ANNEXÉES

ÉVREUX. — H. DÉVÉ, IMPRIMEUR. — 21-10-25.

